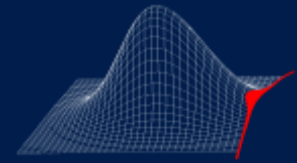




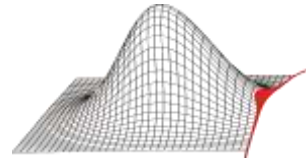
TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DRESDEN



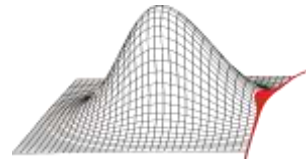
Fakultät Maschinenwesen · Institut für Strömungsmechanik · Professur für Turbomaschinen und Strahlantriebe

# Grundlagen der Probabilistik

**Matthias Voigt**



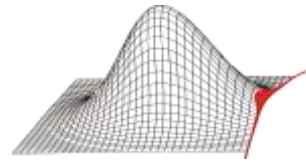
- Einleitung
- Theoretische Grundlagen der Statistik
- Probabilistische Methoden
- Mögliche Ergebnisse von probabilistischen Untersuchungen
- Mögliche Fehlerquellen bei probabilistischen Untersuchungen
- Zusammenfassung



## Zwei Turbinenschaufeln aus der gleichen Maschine



Quelle: Massachusetts Institute of Technology, Prof. David L. Darmofal



## Stochastik

### Lehre der Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit



#### Kombinatorik

Wie viele Möglichkeiten gibt es, Elemente anzuordnen oder aus einer Menge von Elementen zu ziehen?



#### Statistik

Ableiten von Gesetzmäßigkeiten und Strukturen aus Ereignissen

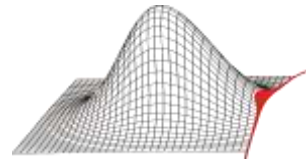


#### Probabilistik

Definition von Modellen zur Beschreibung von zufälligen Ereignissen

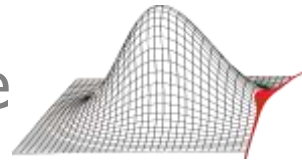


Vorhersagen dieser Ereignisse

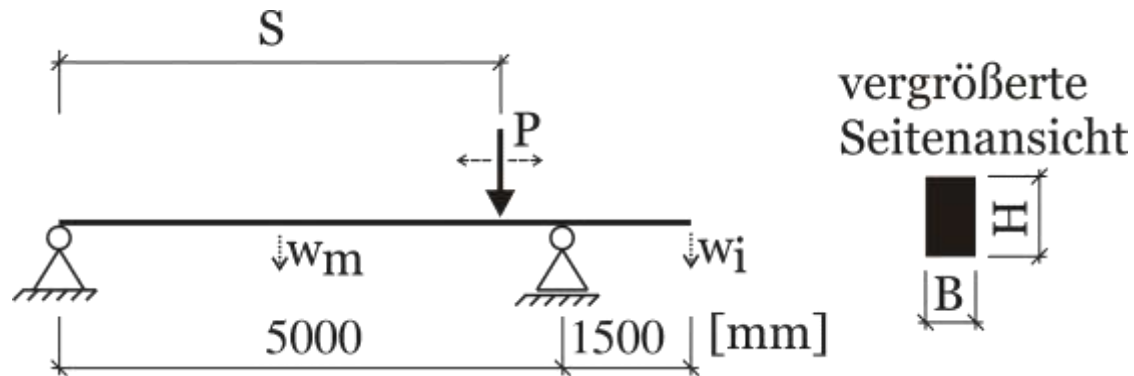


## Probabilistische Simulationen von Systemen

Deterministische  
Modelle



## Träger auf zwei Stützen mit Kragarm

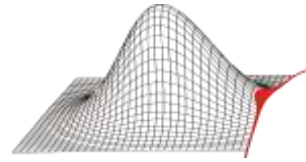


Eingangsgrößen:

- Höhe des Trägers
- Breite des Trägers
- E-Modul
- Punktlast
- Position der Punktlast

Ergebnisgrößen:

Durchbiegungen  $w_m$ ,  $w_i$

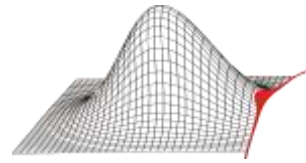


## Probabilistische Simulationen von Systemen

Deterministische  
Modelle

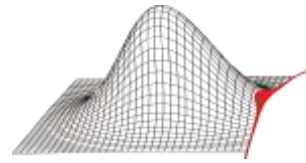
Verteilungsart,  
Verteilungsparameter,  
Korrelationen der  
Eingangsgrößen

Probabilistische  
Methoden



- Einleitung
- **Theoretische Grundlagen der Statistik**
- Probabilistische Methoden
- Mögliche Ergebnisse von probabilistischen Untersuchungen
- Mögliche Fehlerquellen bei probabilistischen Untersuchungen
- Zusammenfassung





Zufallsexperiment



diskret

Zufallsvariable

stetig



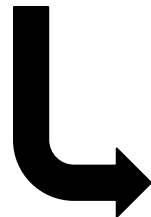
Wahrscheinlichkeitsfunktion

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

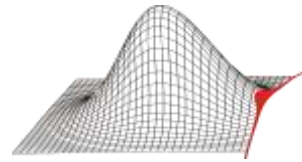


$$F(b) = \sum_{b_{ri} \leq b} f(b_{ri})$$

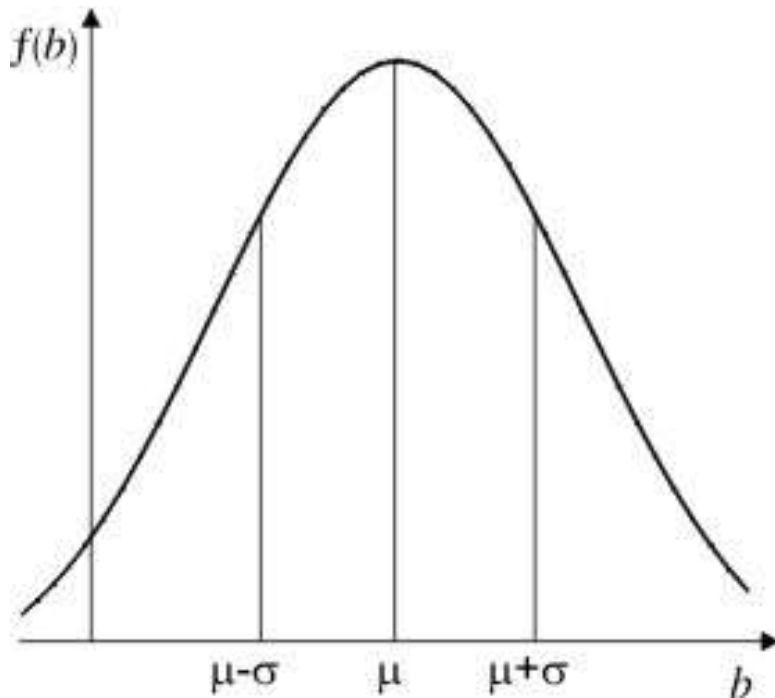
$$F(b) = \int_{-\infty}^b f(\tilde{b}) d\tilde{b}$$



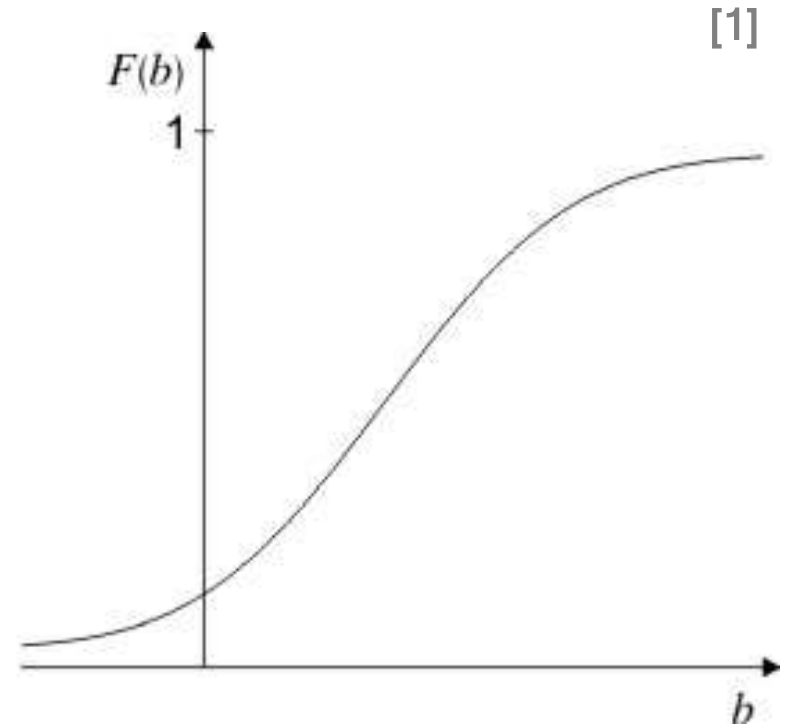
$$F(b) = P(\mathbf{b} \leq b)$$



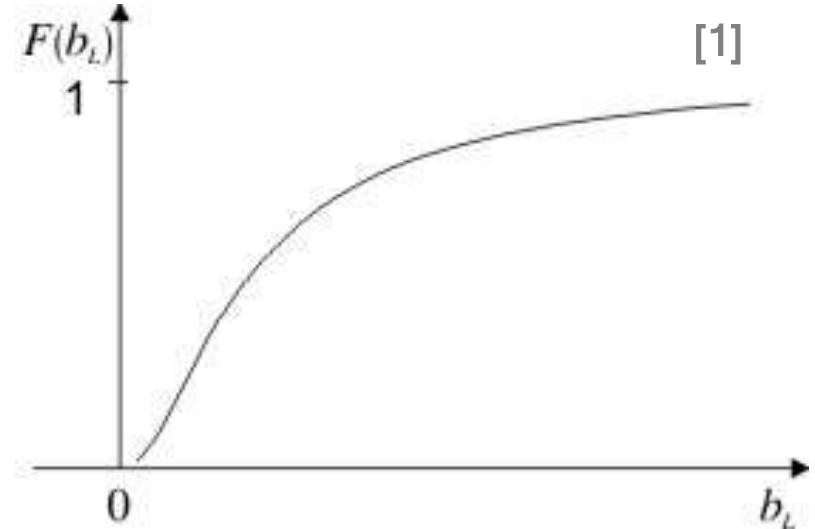
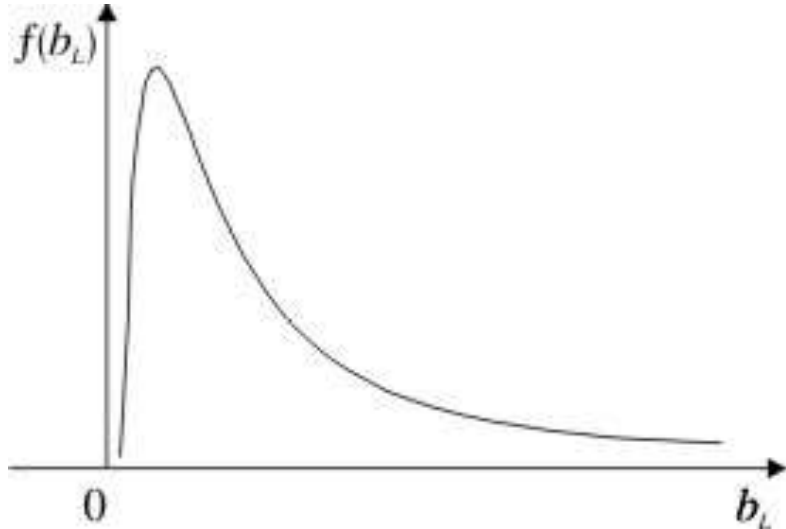
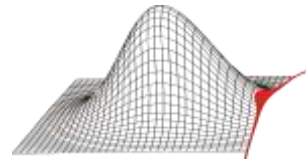
- auch Normalverteilung genannt



$$f(b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(b - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

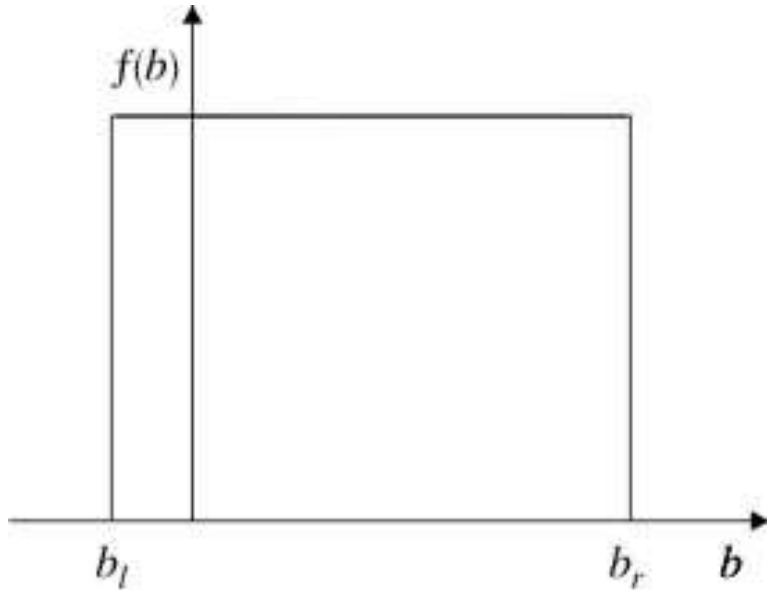
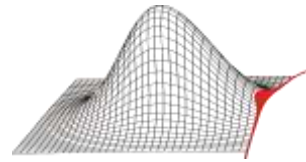


$$F(b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^b \exp\left\{-\frac{(\tilde{b} - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} d\tilde{b}$$

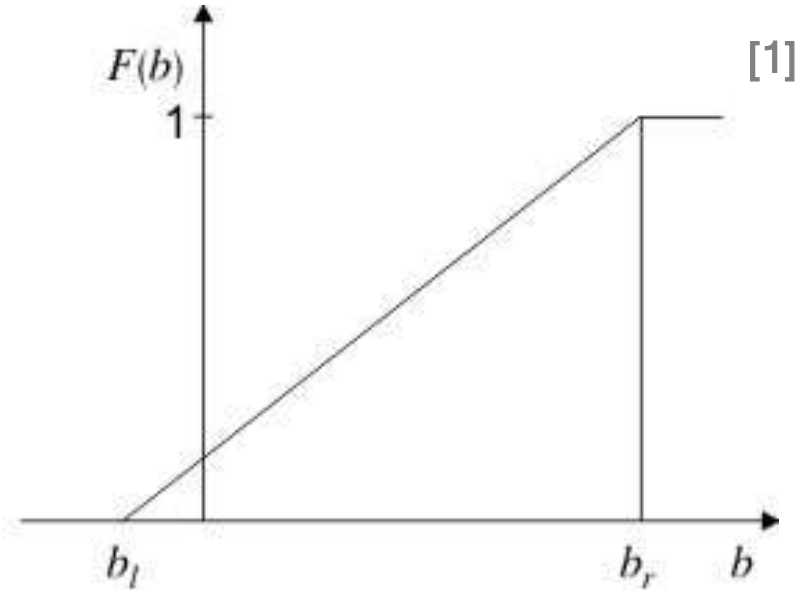


$$f(b_L) = \begin{cases} \frac{1}{\zeta \sqrt{2\pi} b_L} \exp \left\{ -\frac{(\ln b_L - \lambda)^2}{2\zeta^2} \right\} & \text{für } b_L > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

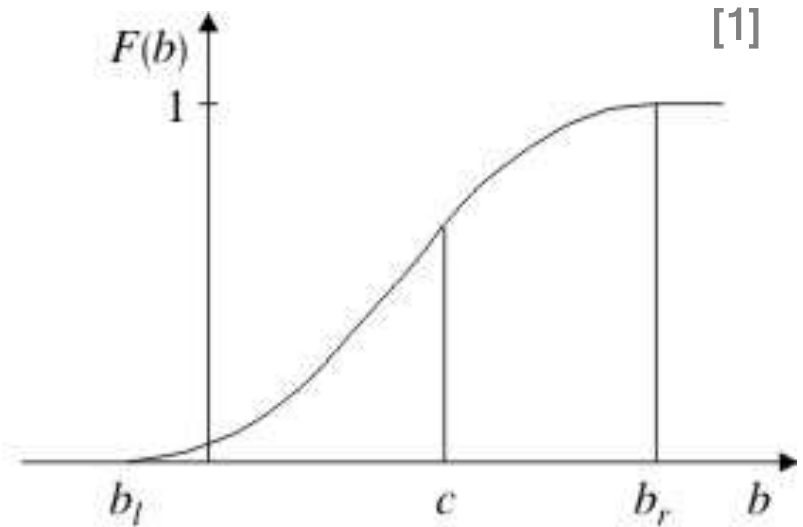
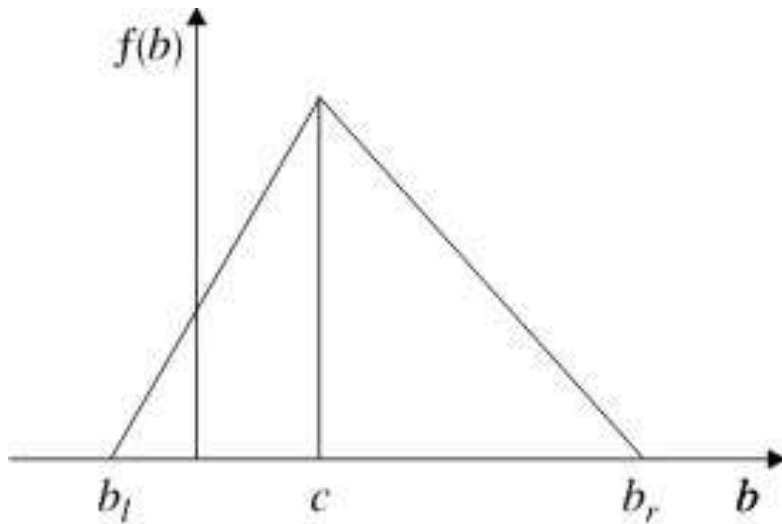
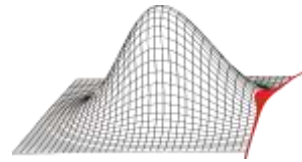
$$F(b_L) = \begin{cases} \frac{1}{\zeta \sqrt{2\pi}} \int_0^{b_L} \frac{1}{\tilde{b}_L} \exp \left\{ -\frac{(\ln \tilde{b}_L - \lambda)^2}{2\zeta^2} \right\} d\tilde{b}_L & \text{für } \tilde{b}_L > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad [1]$$



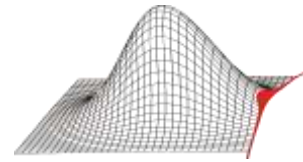
$$f(b) = \begin{cases} \frac{1}{b_r - b_l} & b_l \leq b \leq b_r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



$$F(b) = \begin{cases} 0 & b < b_l \\ \frac{b - b_l}{b_r - b_l} & b_l \leq b \leq b_r \\ 1 & b > b_r \end{cases} \quad [1]$$

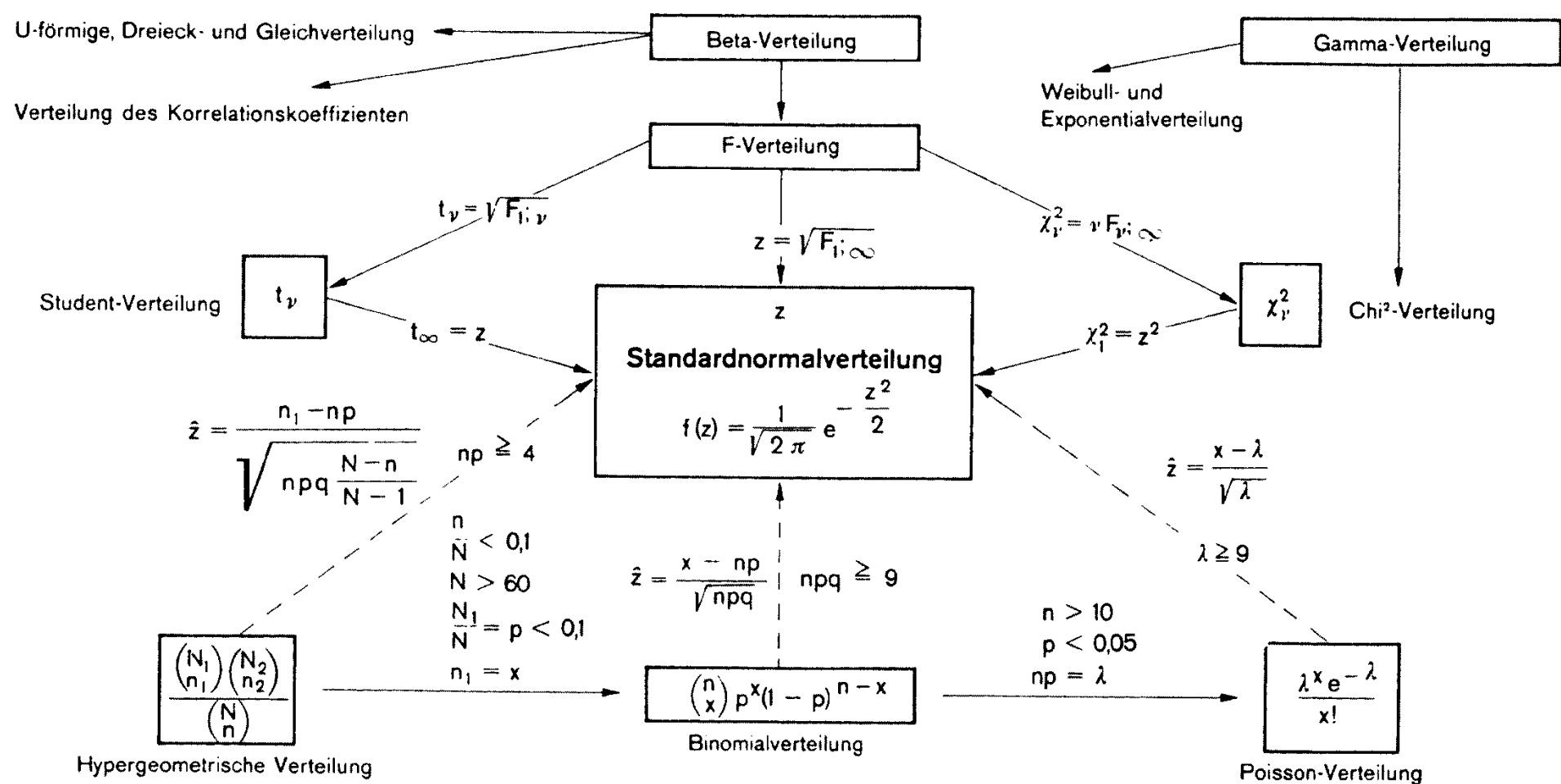


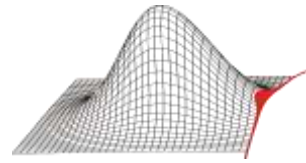
$$f(b) = \begin{cases} f_l(b) = \frac{2(b - b_l)}{(b_r - b_l)(c - b_l)} & b_l \leq b < c \\ f_r(b) = \frac{2(b_r - b)}{(b_r - b_l)(b_r - c)} & c \leq b \leq b_r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad F(b) = \begin{cases} 0 & b < b_l \\ F_l(b) = \frac{b^2 + b_l^2 - 2b_l b}{(b_l - b_r)(b_l - c)} & b_l \leq x < c \\ F_r(b) = \frac{b^2 - 2b_r b + b_r c + b_l(b - c)}{(b_l - b_r)(b_r - c)} & c \leq b \leq b_r \\ 1 & b > b_r \end{cases}$$



## Übersicht 54. Zusammenhänge zwischen einigen Verteilungen

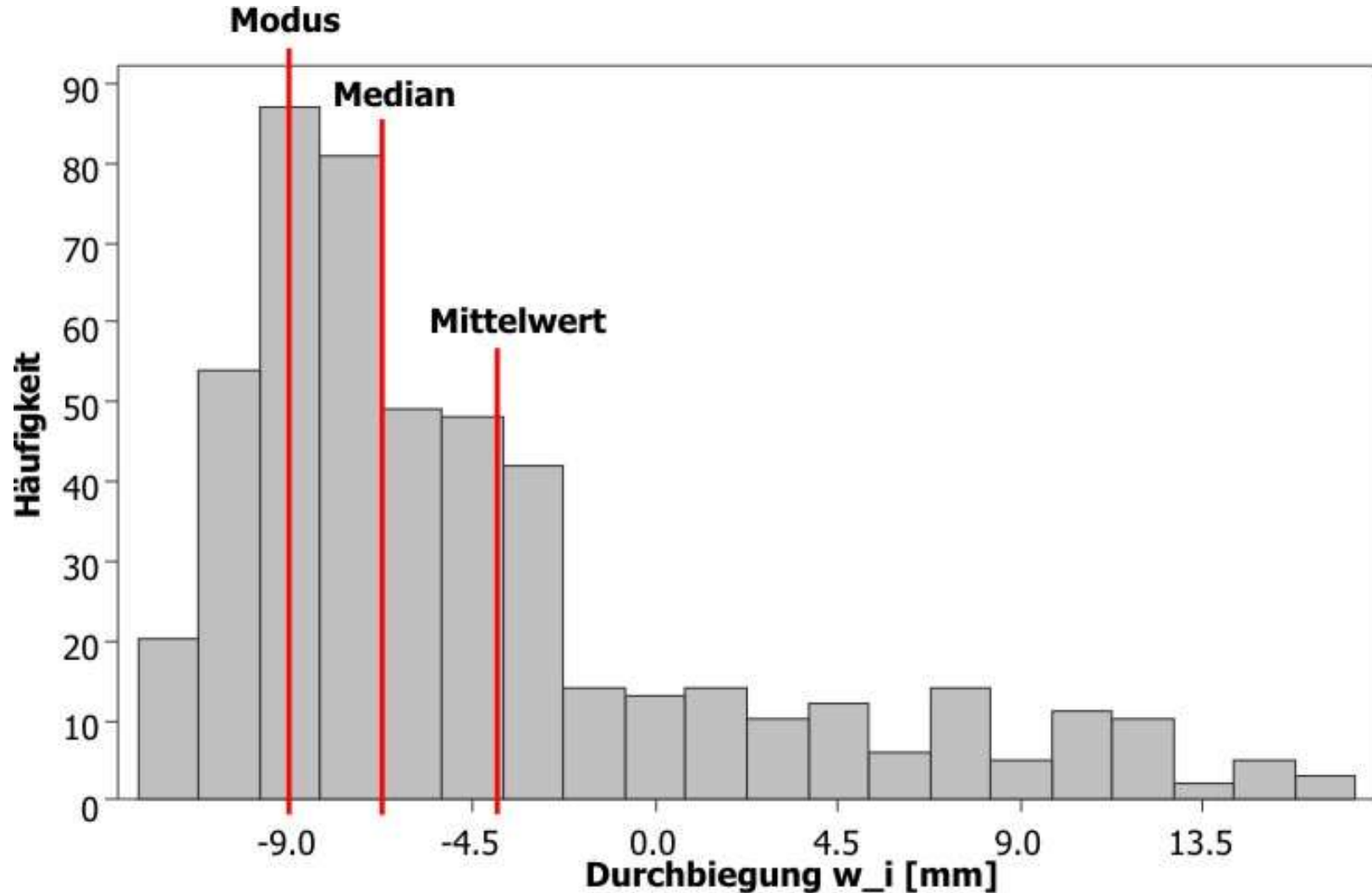
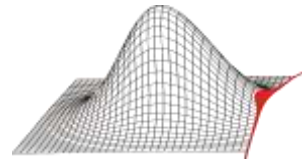
[1]



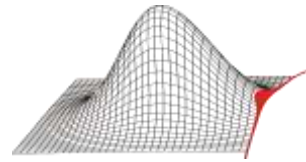


[1]

- Arithmetischer Mittelwert: 
$$\bar{b}_{ri} = \frac{1}{n_{sim}} \sum_{k=1}^{n_{sim}} b_{ri,k}$$
  - Flächenschwerpunkt der Fläche unter der Dichtefunktion
  - Stark abhängig von Ausreißern
- Median oder Zentralwert: *Stichprobenwert, der genau in der Mitte einer geordneten Stichprobe steht.*
  - Robustes Lagemaß
- Modulwert oder Modus: *Ausprägung mit der größten Häufigkeit*
  - Nur eindeutig, wenn die Häufigkeitsverteilung ein eindeutiges Maximum aufweist







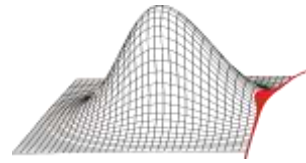
Standardabweichung:

[1]

$$\sigma(\mathbf{b}_{ri}) = \sqrt{Var(\mathbf{b}_{ri})} = \sqrt{\frac{1}{n_{sim} - 1} \sum_{k=1}^{n_{sim}} (b_{ri,k} - \bar{b}_{ri})^2}$$

Variationskoeffizient:

$$\delta(\mathbf{b}_{ri}) = \frac{\sigma(\mathbf{b}_{ri})}{\bar{b}_{ri}}$$

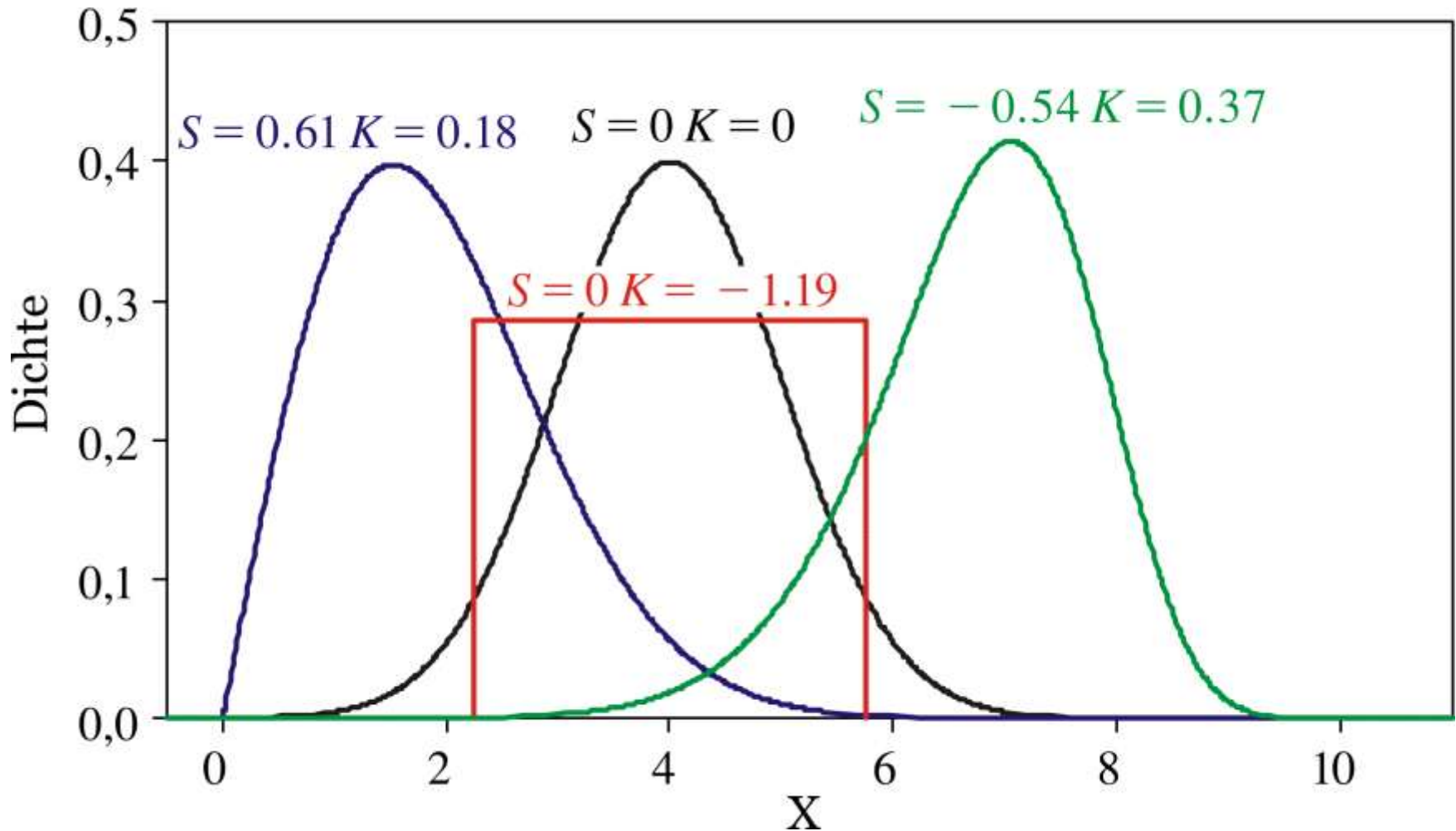
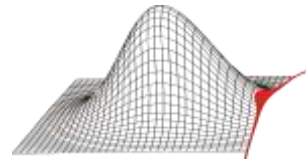


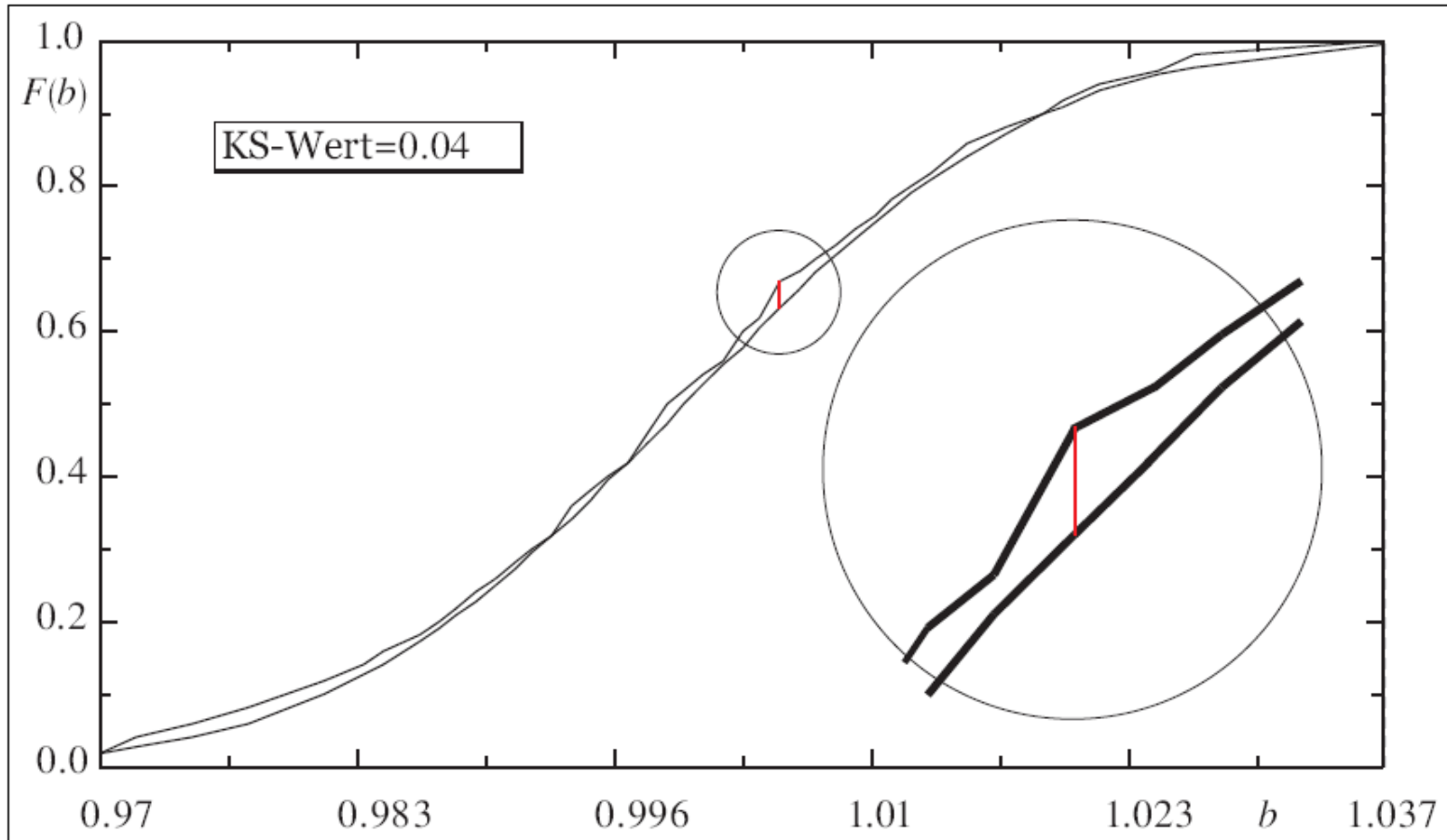
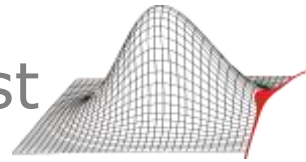
Schiefe: *Grad der Asymmetrie einer Verteilung um den [1] Median*

$$S = \frac{\sum_{i=1}^{n_{sim}} (b_{ri} - \bar{b}_{ri})^3}{n_{sim} * \sigma^3}$$

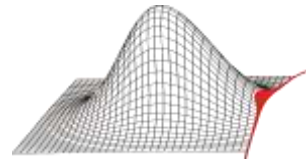
Wölbung: *Grad der Flachheit/Steilheit einer Verteilung*

$$K = \frac{\sum_{i=1}^{n_{sim}} (b_{ri} - \bar{b}_{ri})^4}{n_{sim} * \sigma^4} - 3$$





$$KS = \max_{-\infty < b_k < \infty} |F_d(b_k) - F_s(b_k)|$$

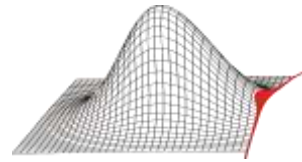


Der Anderson-Darling-Test ist eine Modifikation des [10]  
Kolmogorow-Smirnow-Anpassungstests.

Die Abweichungen der Testverteilung von der Zielverteilung werden in den Randbereichen der Verteilungen höher und im Mittelbereich der Verteilung niedriger gewichtet.

$$A^2 = -n_{sim} - \frac{1}{n_{sim}} \sum_k^{n_{sim}} (2k - 1) (\ln F_s(b_k) + \ln(1 - F_s(b_{n_{sim}+1-k})))$$

Kritische Werte für  $A$  sind abhängig von der verwendeten Verteilungsfunktion  $F_s$ . Tabellierte Werte für  $A$  für verschiedene Verteilungsfunktionen sind z.B. in [11] veröffentlicht.



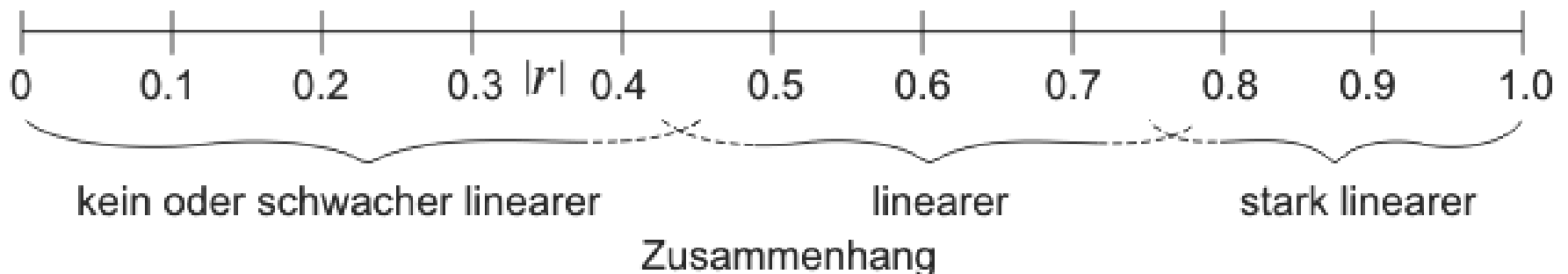
## Korrelationskoeffizient nach Pearson

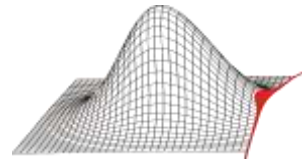
[1]

$$r_{\mathbf{b}_{ri}\mathbf{b}_{rj}} = \frac{Cov(\mathbf{b}_{ri}, \mathbf{b}_{rj})}{\sqrt{Var(\mathbf{b}_{ri})} \sqrt{Var(\mathbf{b}_{rj})}}$$

$$Cov(\mathbf{b}_{ri}, \mathbf{b}_{rj}) = \frac{1}{n_{sim} - 1} \sum_{k=1}^{n_{sim}} (b_{ri,k} - \bar{b}_{ri})(b_{rj,k} - \bar{b}_{rj})$$

Wertebereich:  $[-1, 1]$





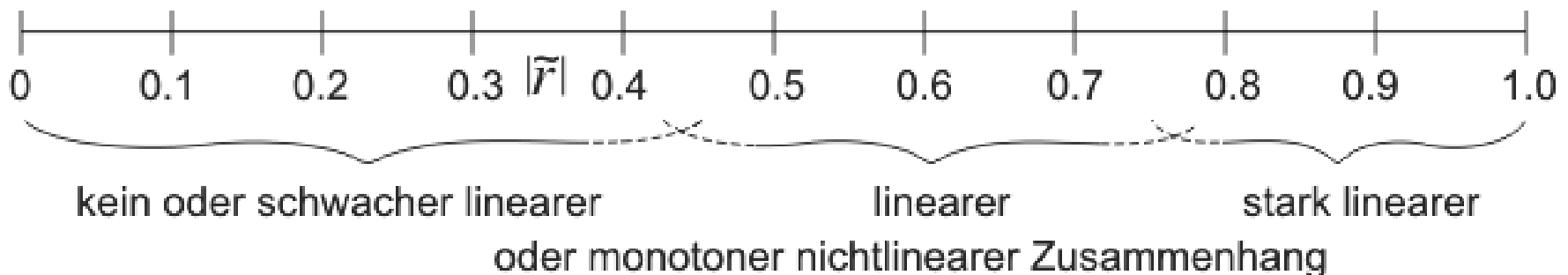
## Rangkorrelationskoeffizient nach Spearman

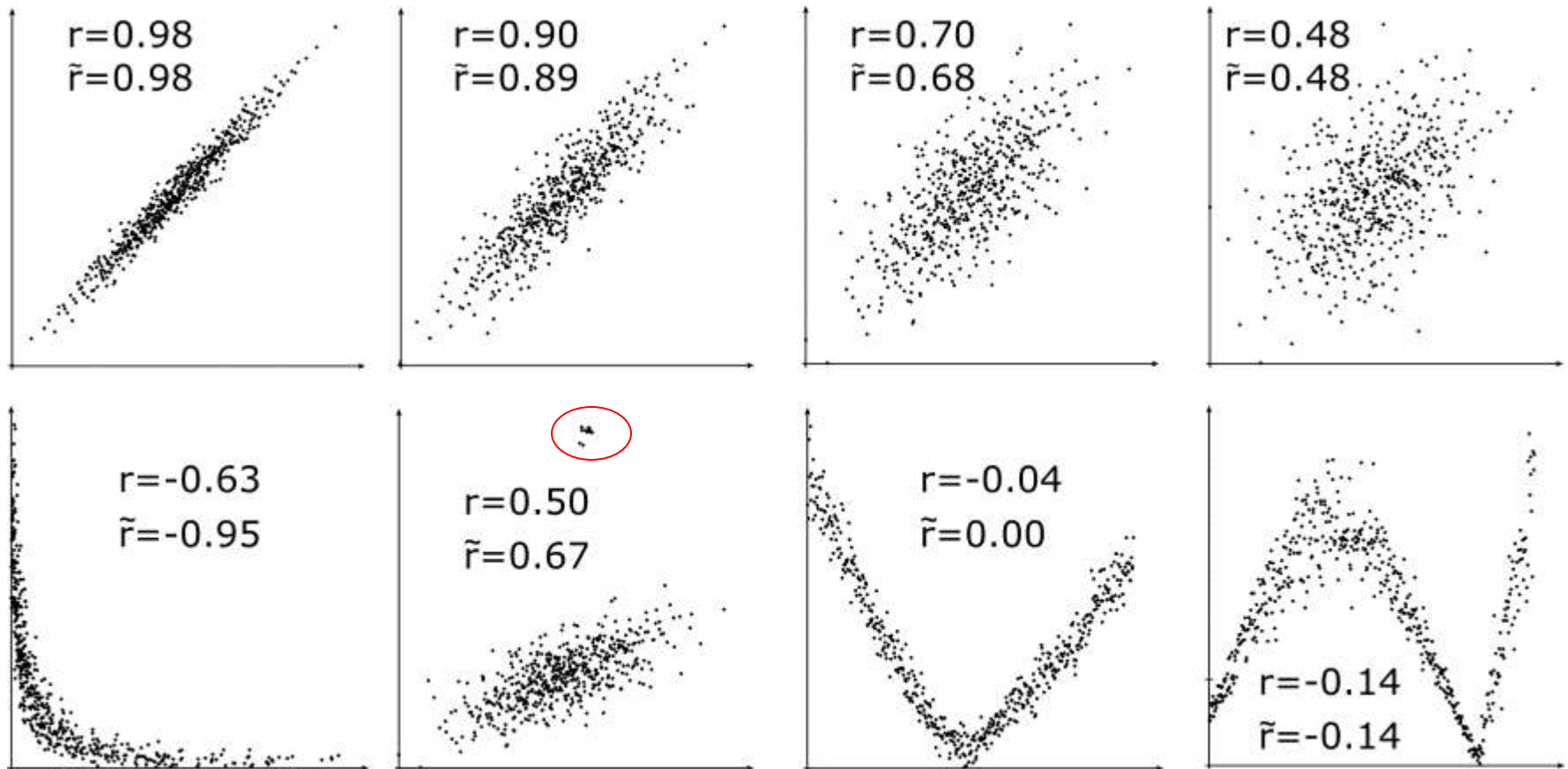
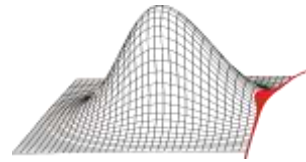
[1]

$$\mathbf{b}_{ri} = \begin{bmatrix} b_{ri,1} \\ \vdots \\ b_{ri,n_{sim}} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rang}(\mathbf{b}_{ri}) = \begin{bmatrix} R_{b_{ri,1}} = \text{Rang von } b_{ri,1} \text{ in } \mathbf{b}_{ri} \\ \vdots \\ R_{b_{ri,n_{sim}}} = \text{Rang von } b_{ri,n_{sim}} \text{ in } \mathbf{b}_{ri} \end{bmatrix}$$

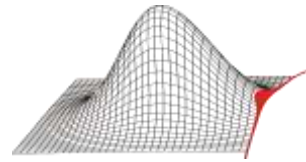
$$\tilde{r}_{\mathbf{b}_{ri}\mathbf{b}_{rj}} = \frac{\sum_{k=1}^{n_{sim}} (R_{b_{ri,k}} - \bar{R}_{b_{ri}})(R_{b_{rj,k}} - \bar{R}_{b_{rj}})}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n_{sim}} (R_{b_{ri,k}} - \bar{R}_{b_{ri}})^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n_{sim}} (R_{b_{rj,k}} - \bar{R}_{b_{rj}})^2}}$$

Wertebereich: [-1,1]



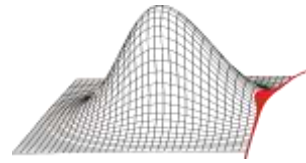




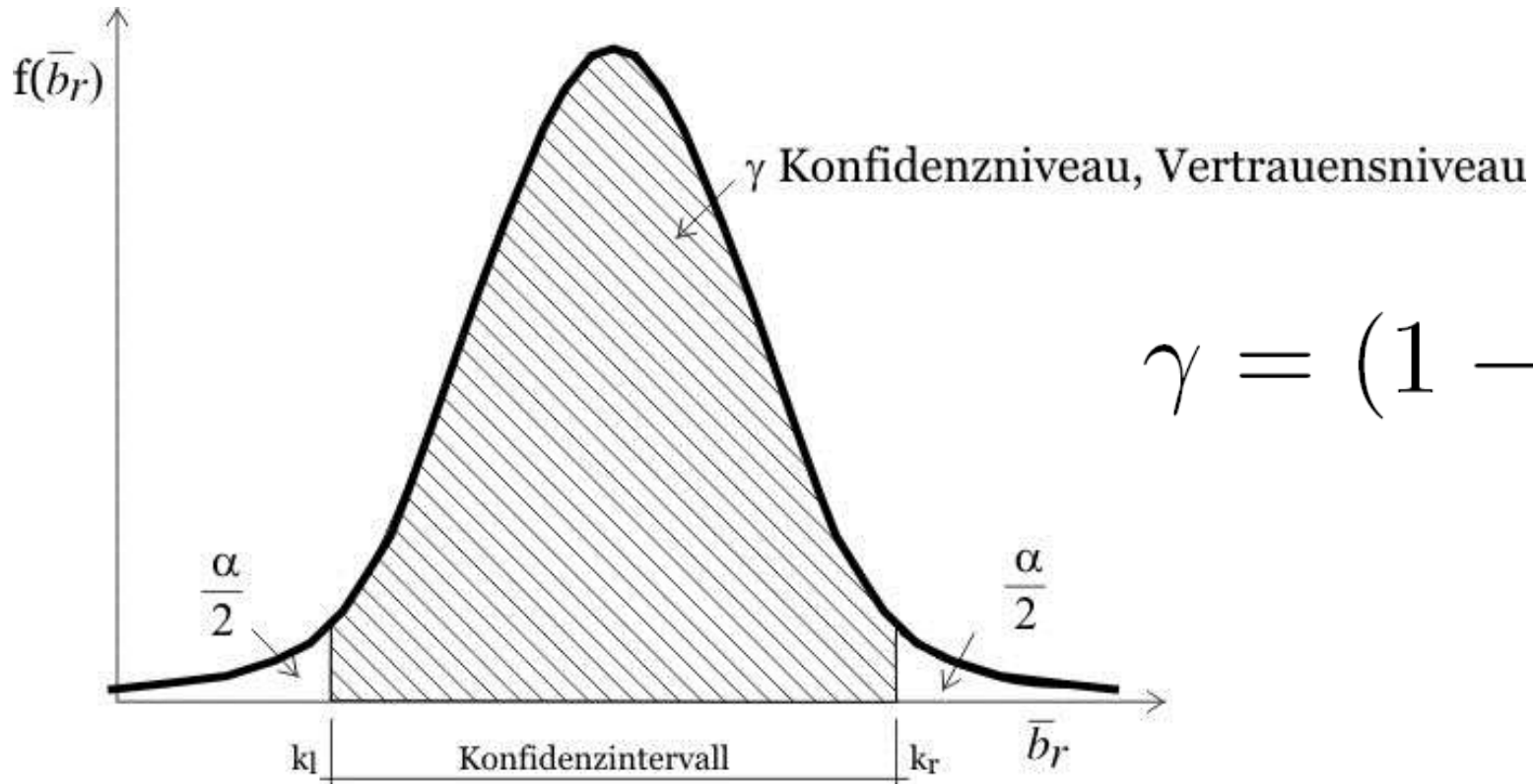


## Nichtlineare Zusammenhänge?

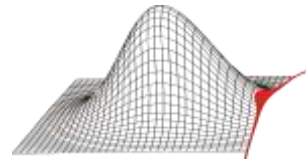
- Ant-Hill-Plot
- Regression
- Quadratischer Korrelationskoeffizient → DYNARDO [9]
- Nichtlineares Korrelationsmaß → ProSi [16]



- Statistische Maße (z.B. Mittelwert, Standardabweichung ...) sind Punktschätzungen → enthalten keine Aussage über die Güte der Schätzung



$$\gamma = (1 - \alpha)$$



Relative Häufigkeit des Ereignisses  $n_f$

$$\hat{p} = \frac{n_f}{n_{sim}}; \quad \hat{p} \rightarrow p \quad \text{sobald } n_{sim} \rightarrow \infty$$

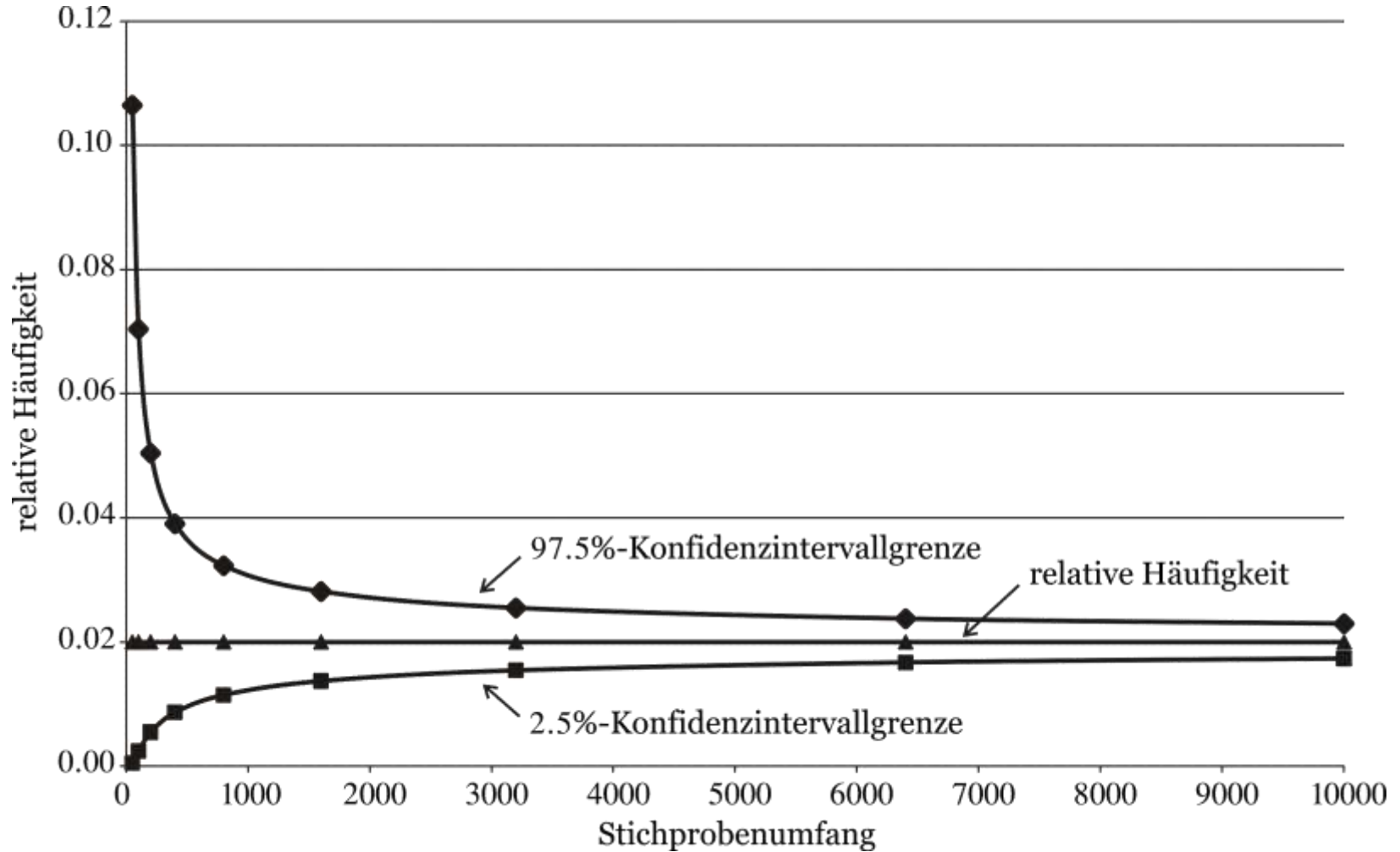
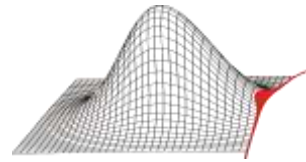
[1]

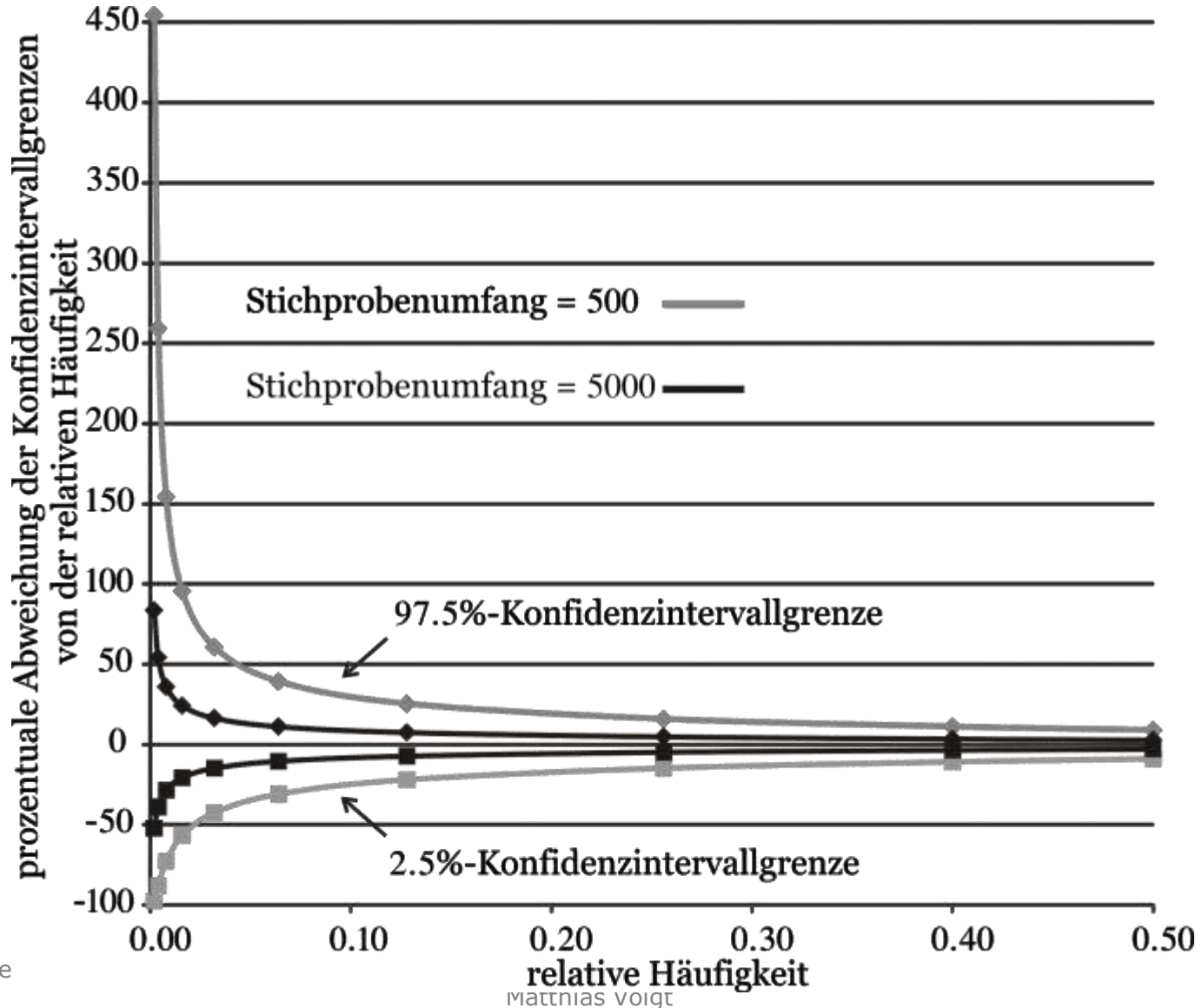
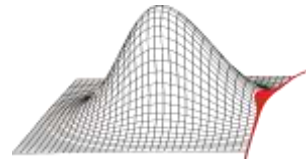
Linke Grenze:

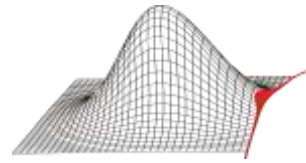
$$\frac{n_f}{n_f + (n_{sim} - n_f + 1) F_{\frac{\alpha}{2}; 2(n_{sim} - n_f + 1); 2n_f}}$$

Rechte Grenze:

$$\frac{(n_f + 1) F_{\frac{\alpha}{2}; 2(n_f + 1); 2(n_{sim} - n_f)}}{n_{sim} - n_f + (n_f + 1) F_{\frac{\alpha}{2}; 2(n_f + 1); 2(n_{sim} - n_f)}}$$







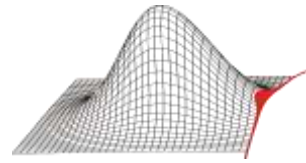
Weicht der Korrelationskoeffizient statistisch signifikant von Null ab, unterscheidet sich seine Verteilung von der Normalverteilung [1].

$$\dot{z} = \operatorname{arctanh} r \quad [3]$$

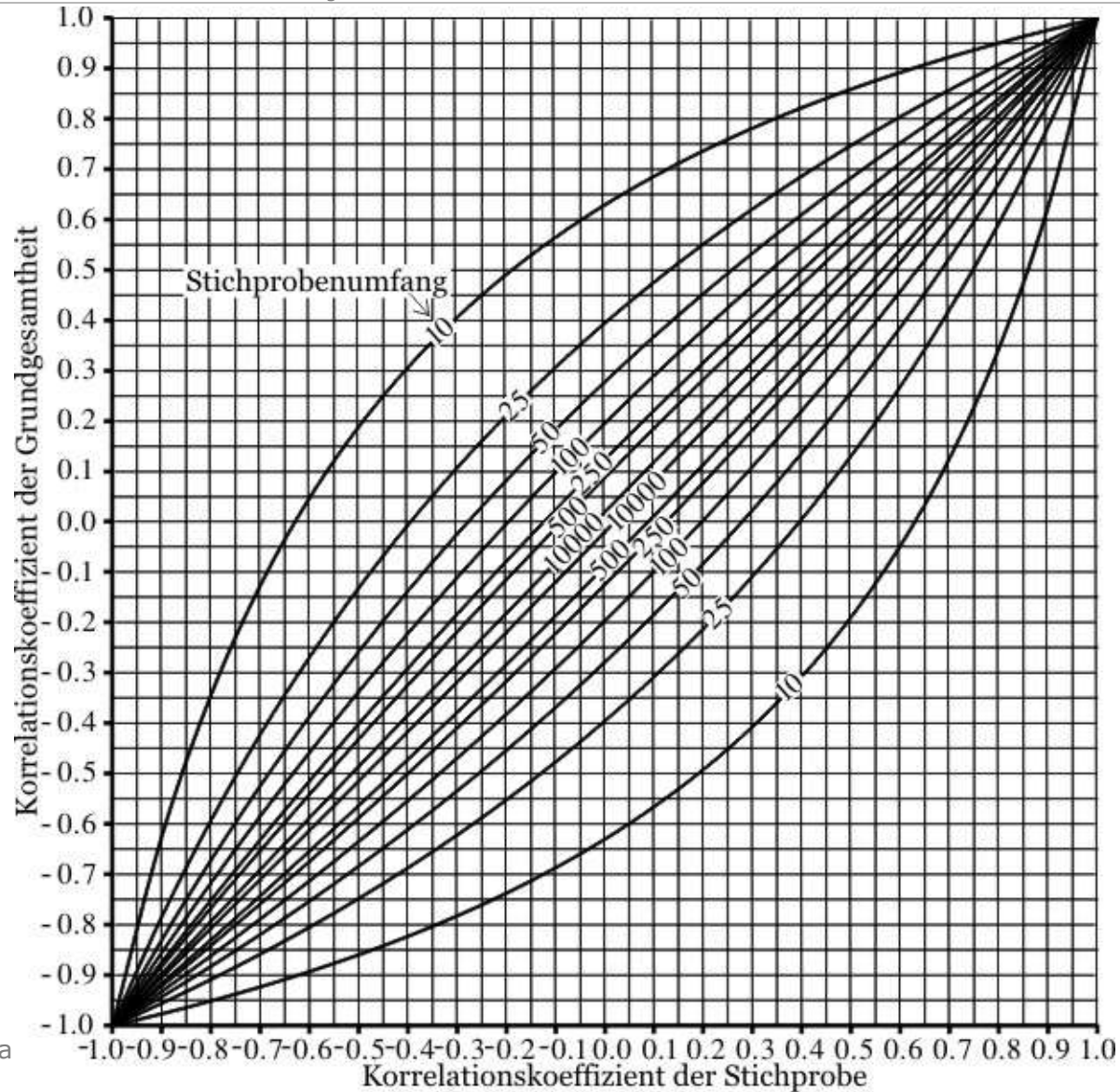
$$\dot{k}_l = \dot{z} - \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n_{sim} - 3}}, \dot{k}_r = \dot{z} + \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n_{sim} - 3}}$$

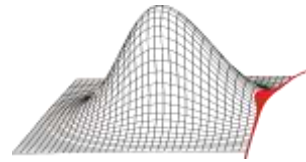
$$k_l = \tanh \dot{k}_l$$

$$k_r = \tanh \dot{k}_r$$

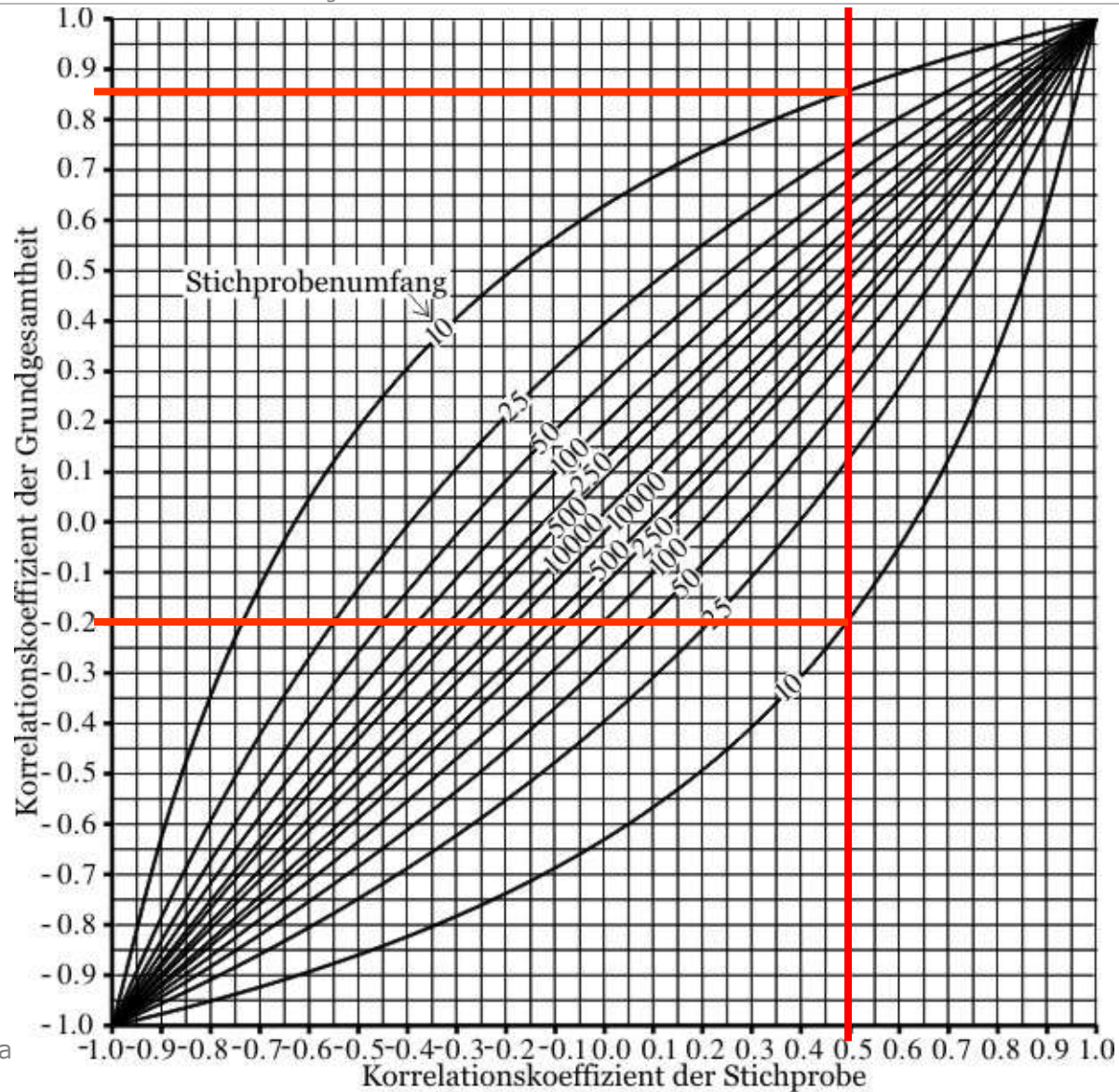


$(\alpha=0.05)$

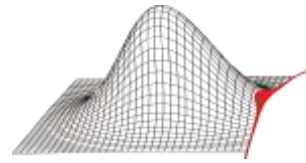




$(\alpha=0.05)$







**Problem:** Meist werden Systeme untersucht, in denen mehrere Zufallsvariablen Einfluss auf eine Ergebnisgröße haben.

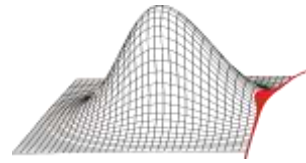
Die Anzahl der Zufallsvariablen hat Einfluss auf die Irrtumswahrscheinlichkeit der Konfidenzintervalle.

**Lösung:**

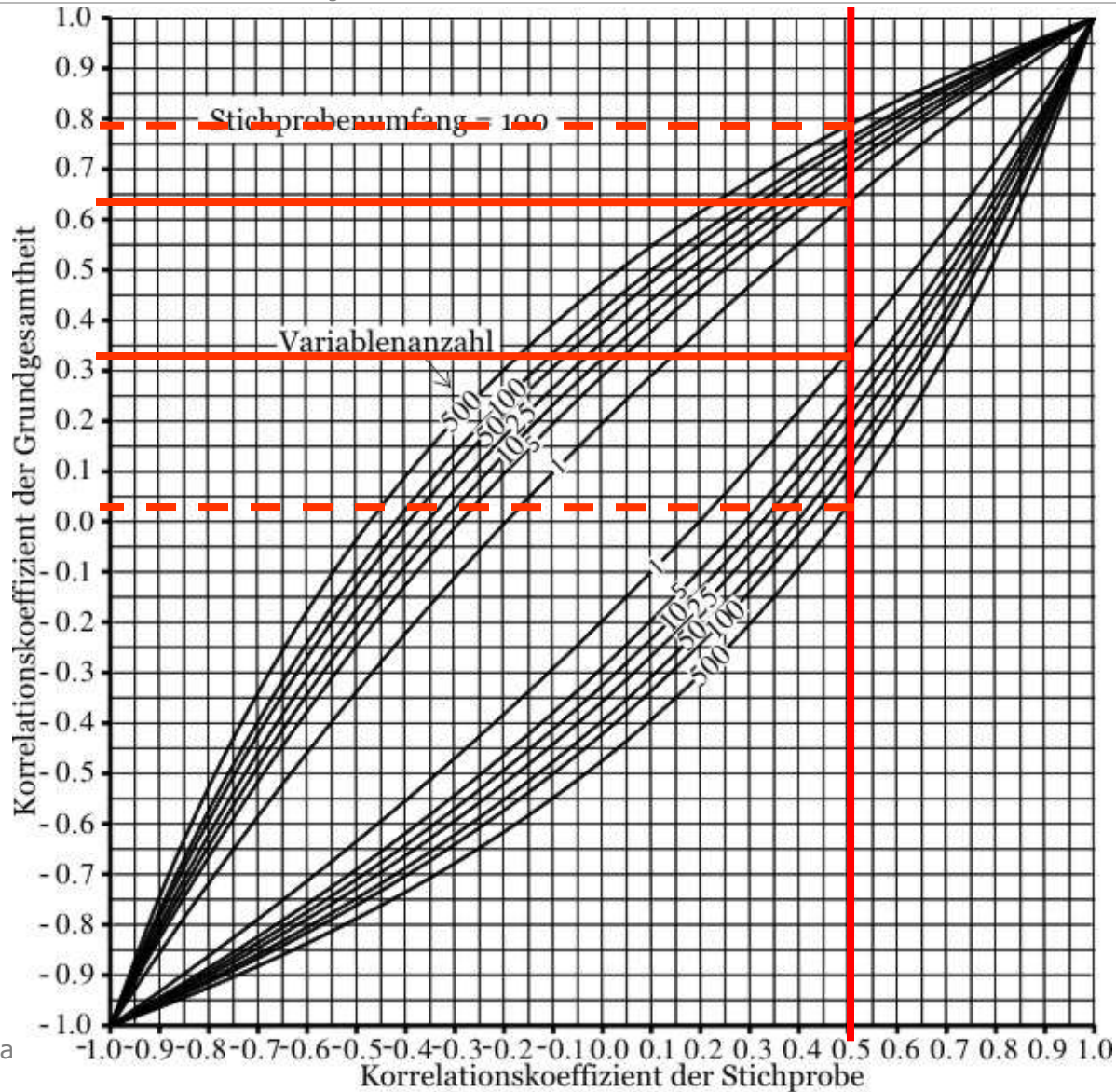
Anpassung der tolerierbaren Irrtumswahrscheinlichkeit mithilfe der Bonferroni-Methode oder Bonferroni-Korrektur:

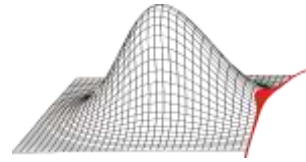
$$\alpha' = \frac{\alpha}{n_b}$$

Die Bonferroni-Methode ist eine grobe Näherung und sehr konservativ.

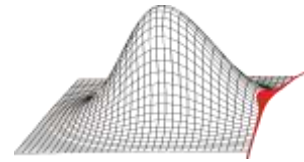


$(\alpha=0.05)$

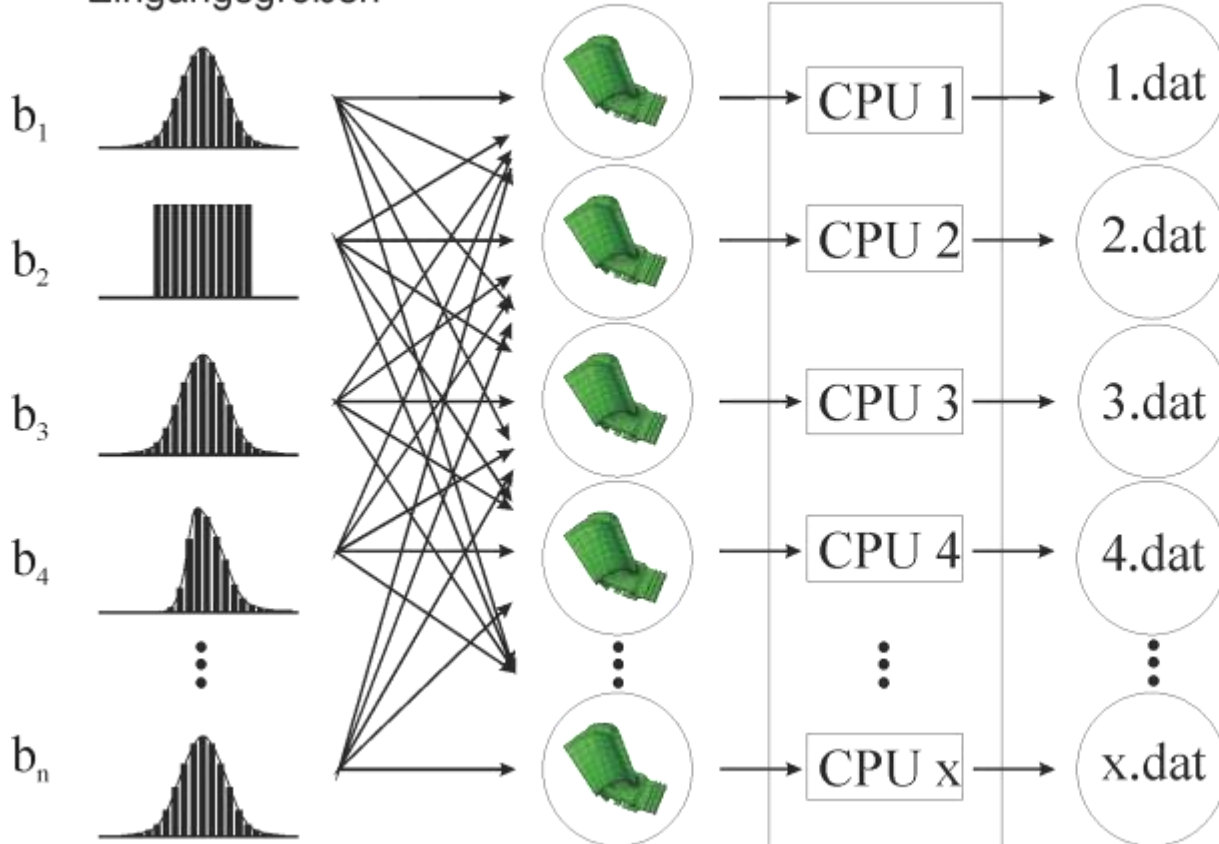




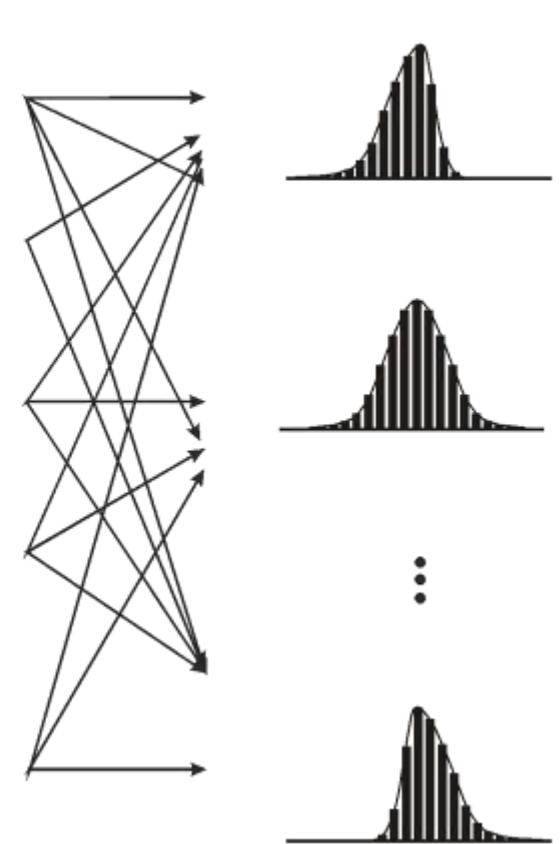
- Einleitung
- Theoretische Grundlagen der Statistik
- **Probabilistische Methoden**
- Mögliche Ergebnisse von probabilistischen Untersuchungen
- Mögliche Fehlerquellen bei probabilistischen Untersuchungen
- Zusammenfassung

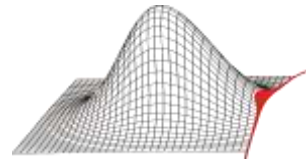


probabilistische  
Eingangsgrößen

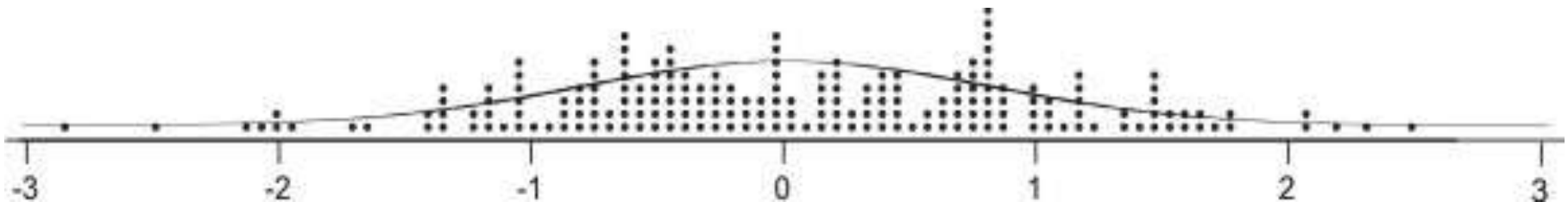


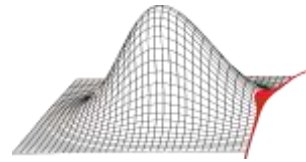
unsicheres Systemverhalten  
mit y Ergebnisgrößen





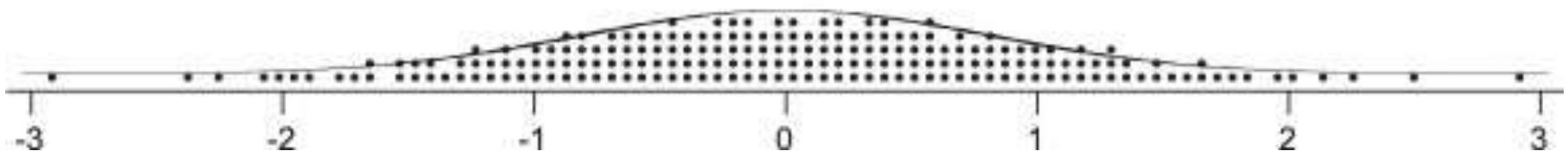
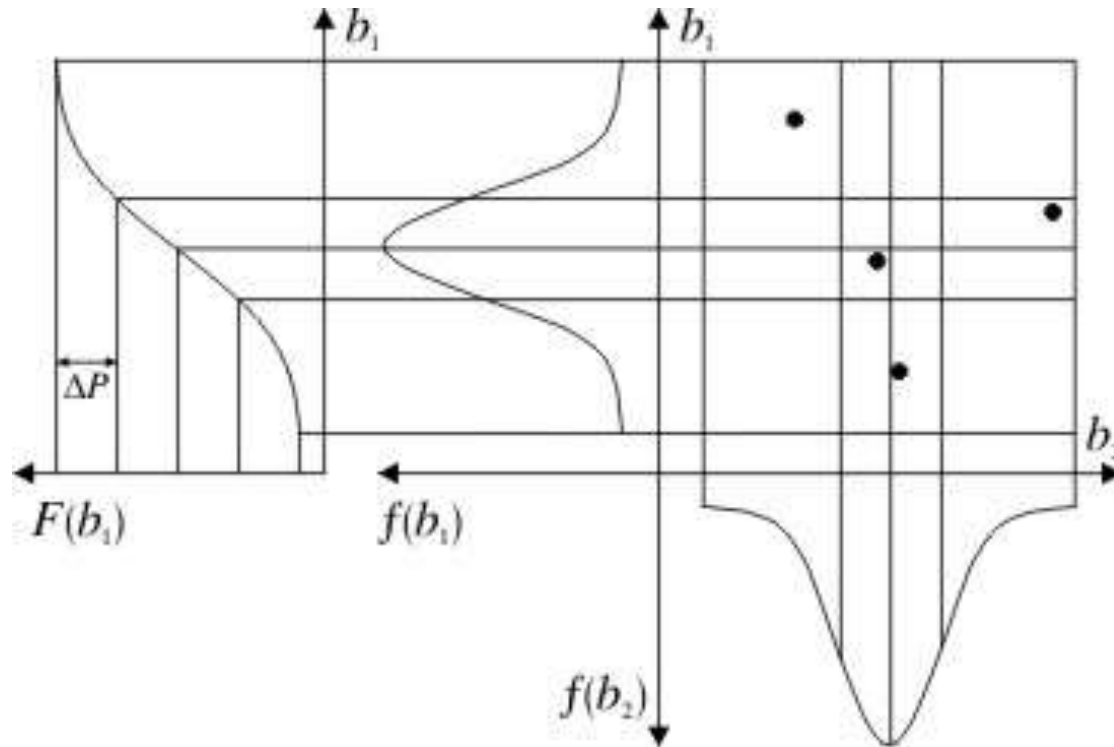
- Simple-Random-Sampling (SRS)
  - Realisierungen werden „zufällig“ ermittelt
  - „Transformation“ der durch die Zufallsgeneratoren ermittelten Gleichverteilungen in andere Verteilungen erfolgt z.B. mittels Inversionsmethode oder Annahme- Ablehnungsmethode
  - „Cluster“-Bildungen der Realisierungen ist möglich

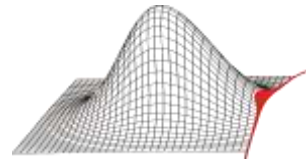




- Latin-Hypercube-Sampling (LHS)

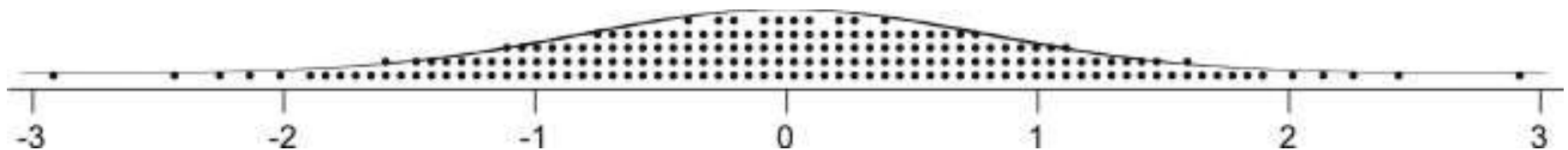
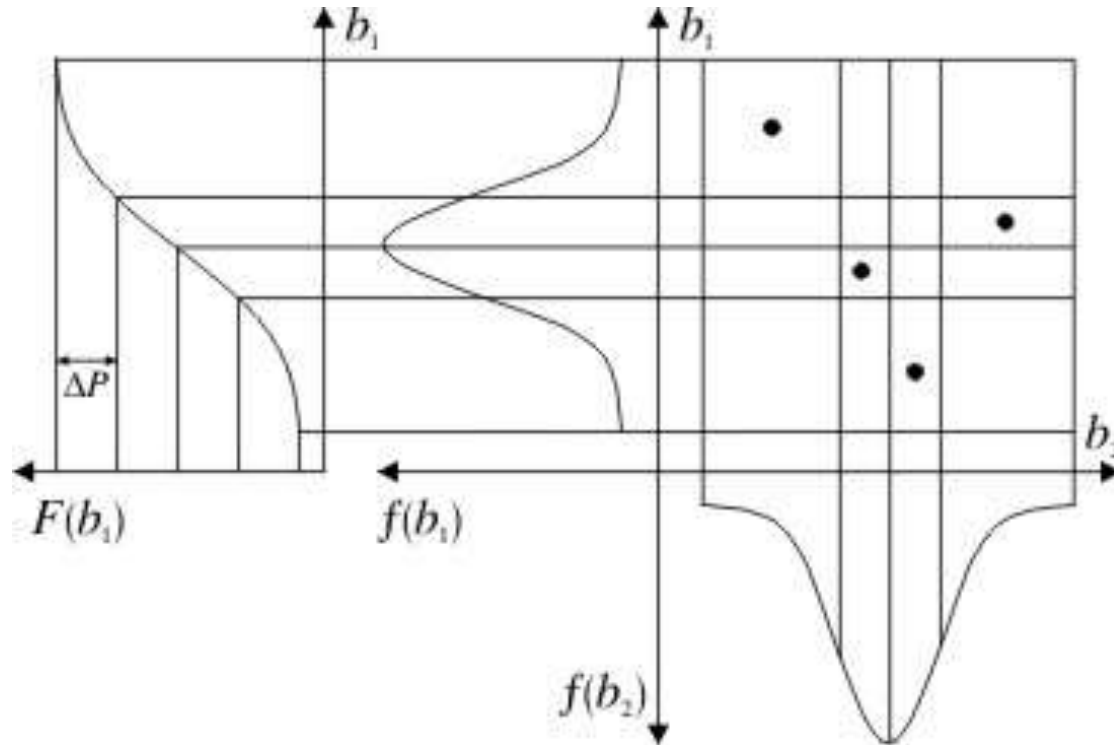
[13]

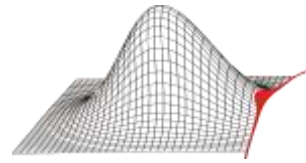




- Descriptive-Sampling (DS)

[14]





## Vor- und Nachteile der Sampling-Methoden

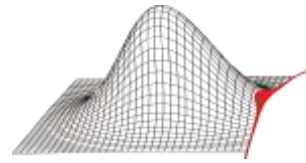
### **SRS**

- Zufallszahlen werden „unsystematisch“ erzeugt
- Liefert bei geringen Stichprobenumfang hohe statistische Unsicherheiten

### **LHS / DS**

- Zufallszahlen werden „systematisch“ erzeugt
- Beschreibt die Zufallsvariablen mit wenigen Realisierungen gut



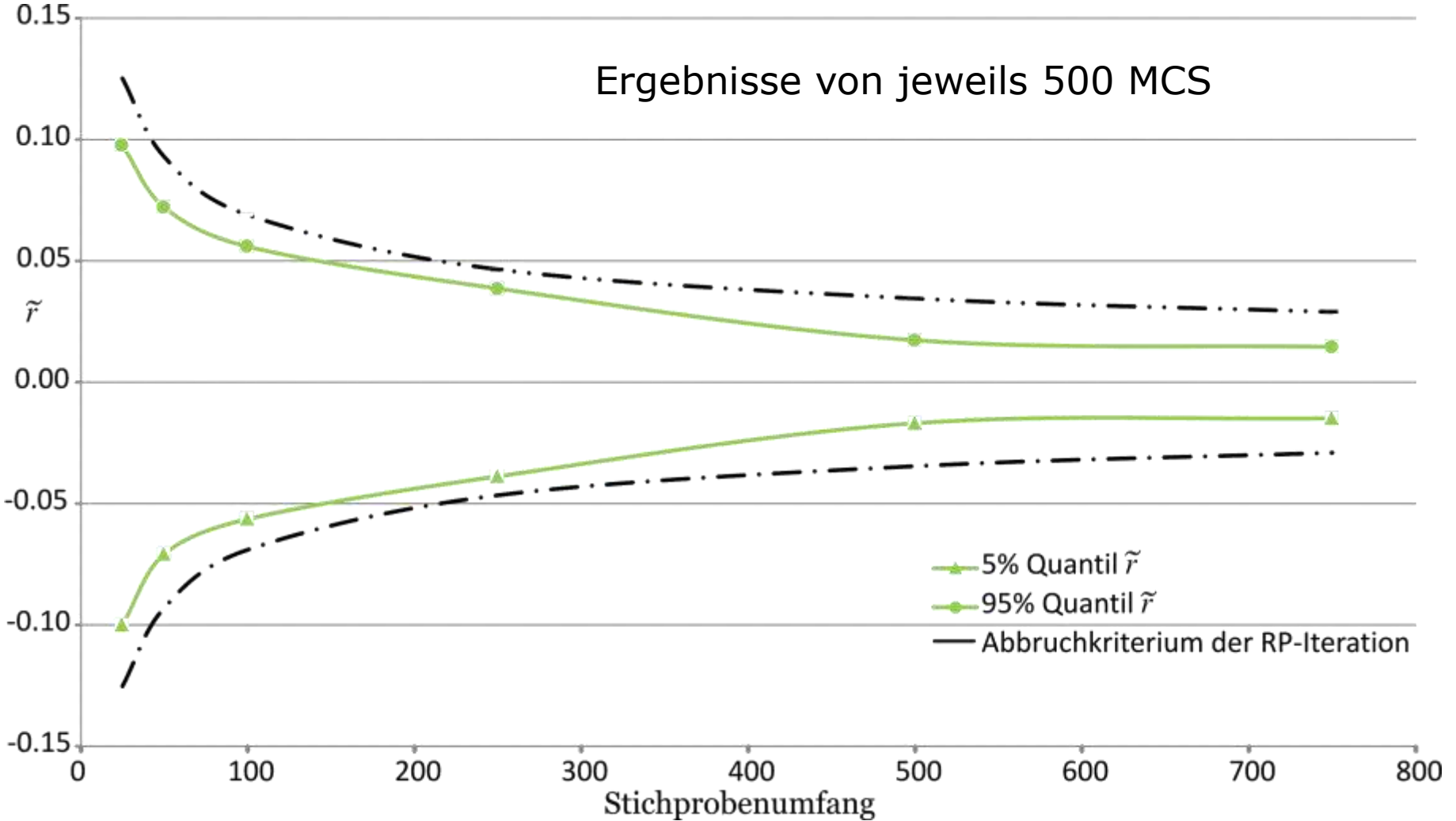
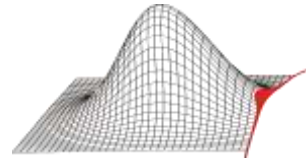


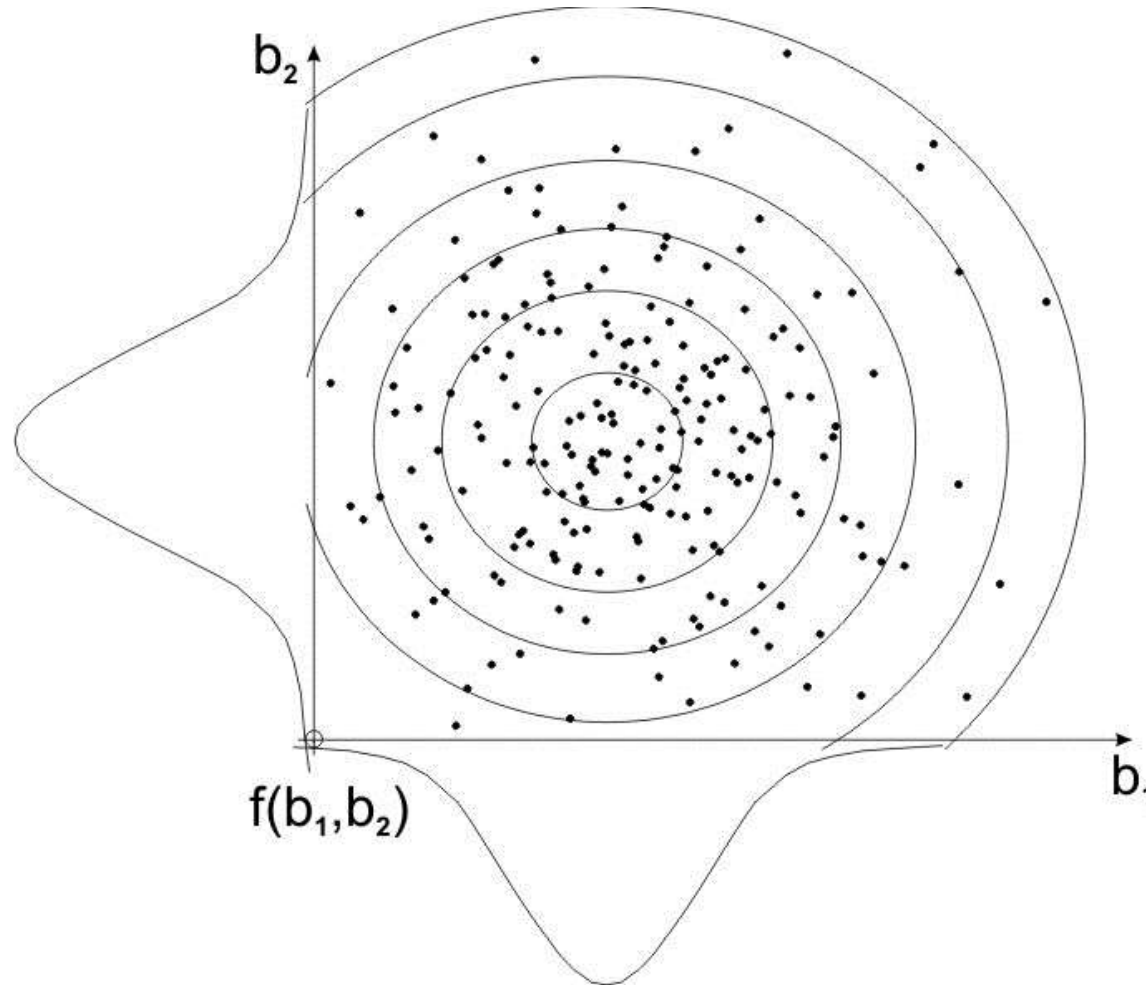
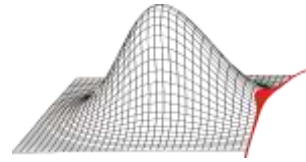
Restricted-Pairing wird in ProSi verwendet, um beliebige Korrelationsstrukturen zwischen Eingangsgrößen zu erzeugen.

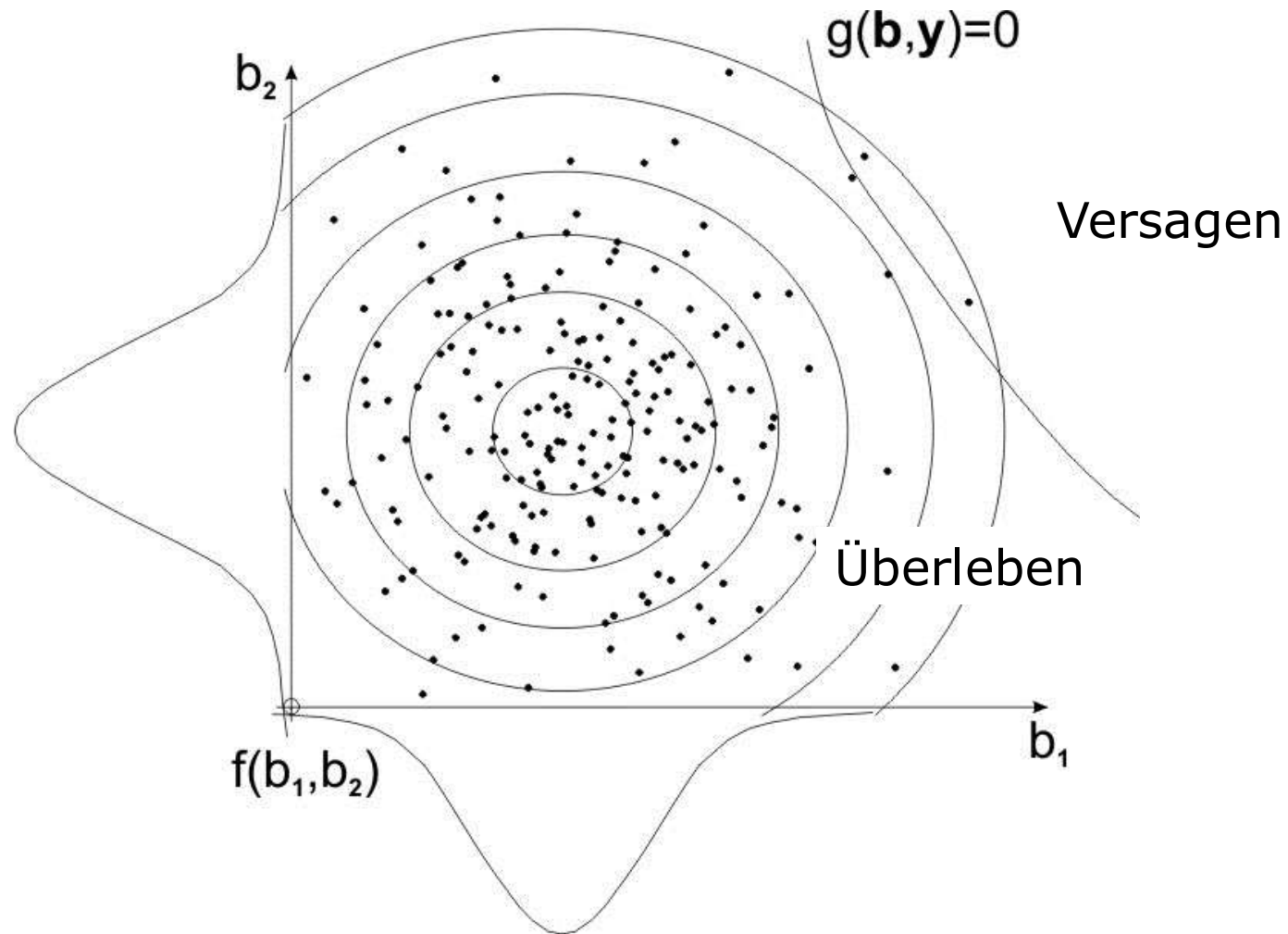
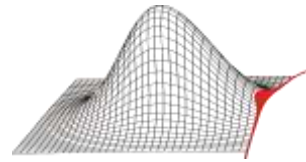
- Ausgangspunkt: Zielkorrelationsmatrix
  - symmetrisch positiv semidefinite Matrix
- Iterative Methode → geeignetes Abbruchkriterium

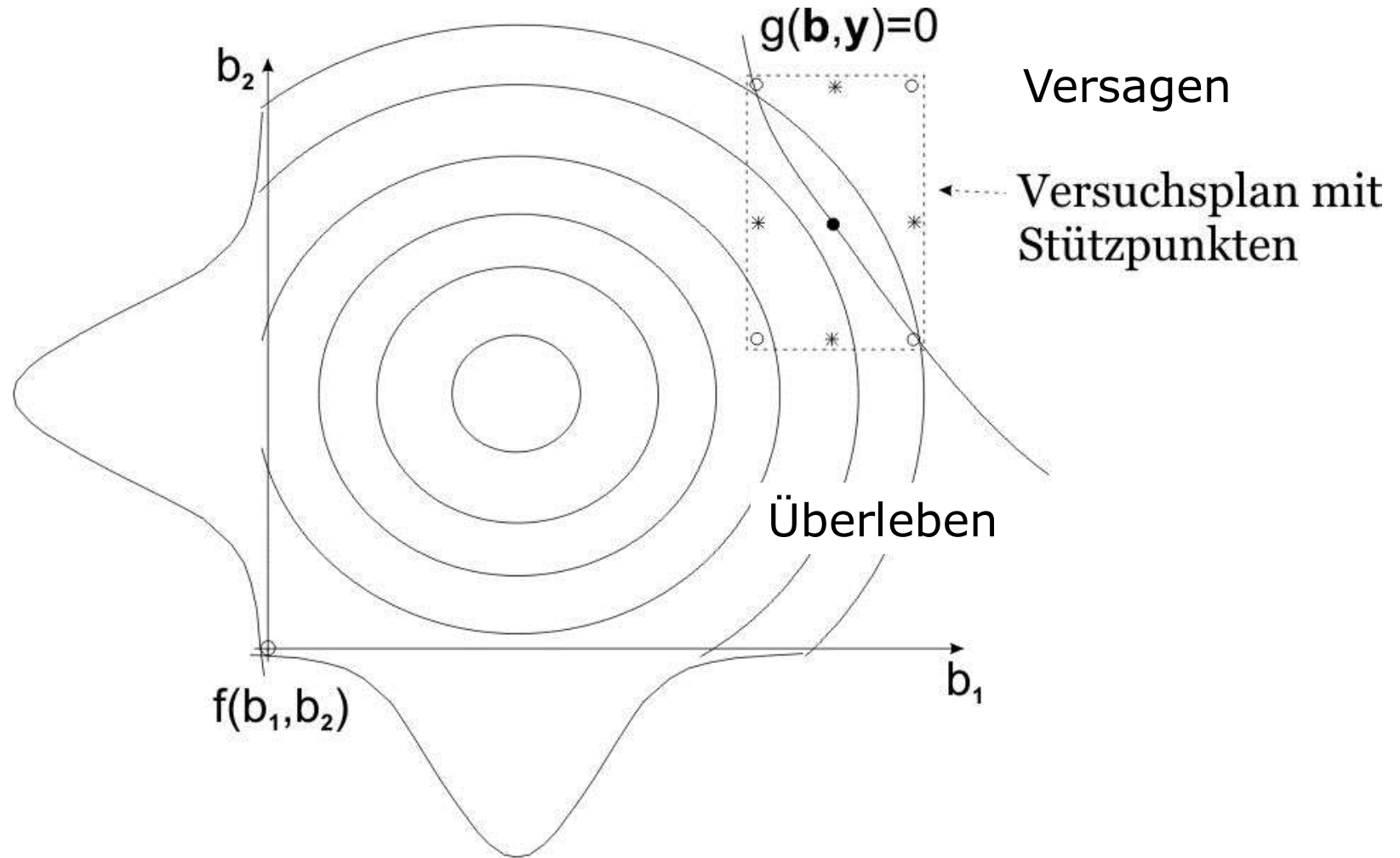
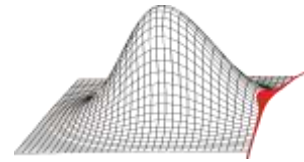
$$\max |\Delta r| = 0.5 * n_{sim}^{-0.43}$$

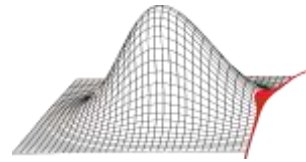
[16]





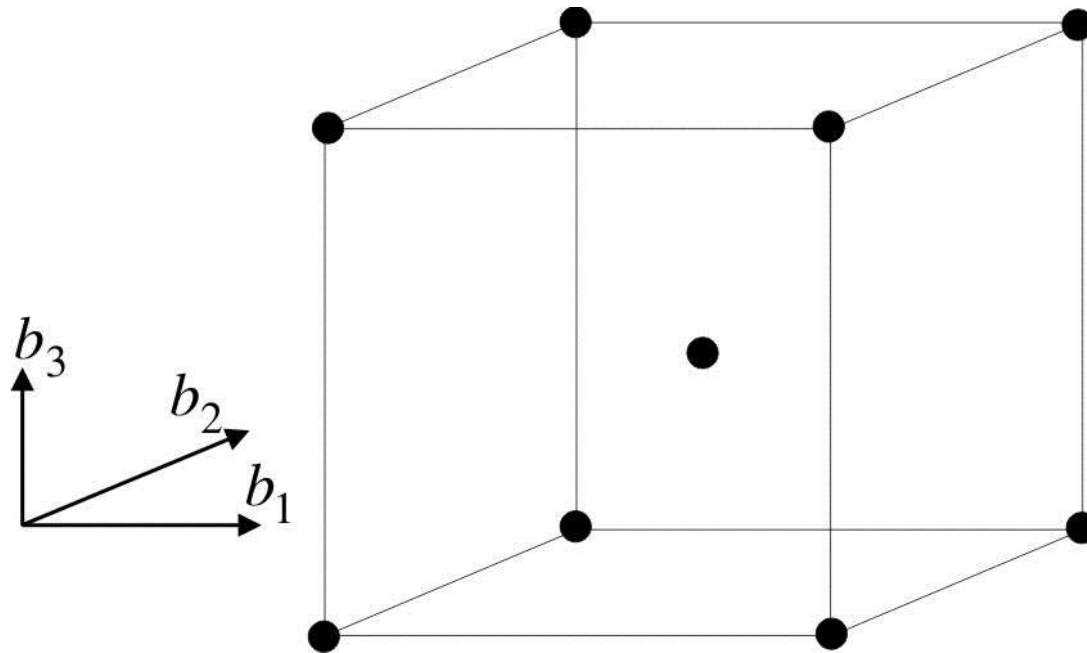


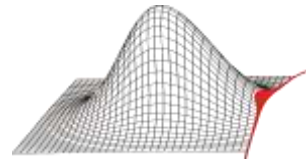




## Vollfaktorieller Versuchsplan

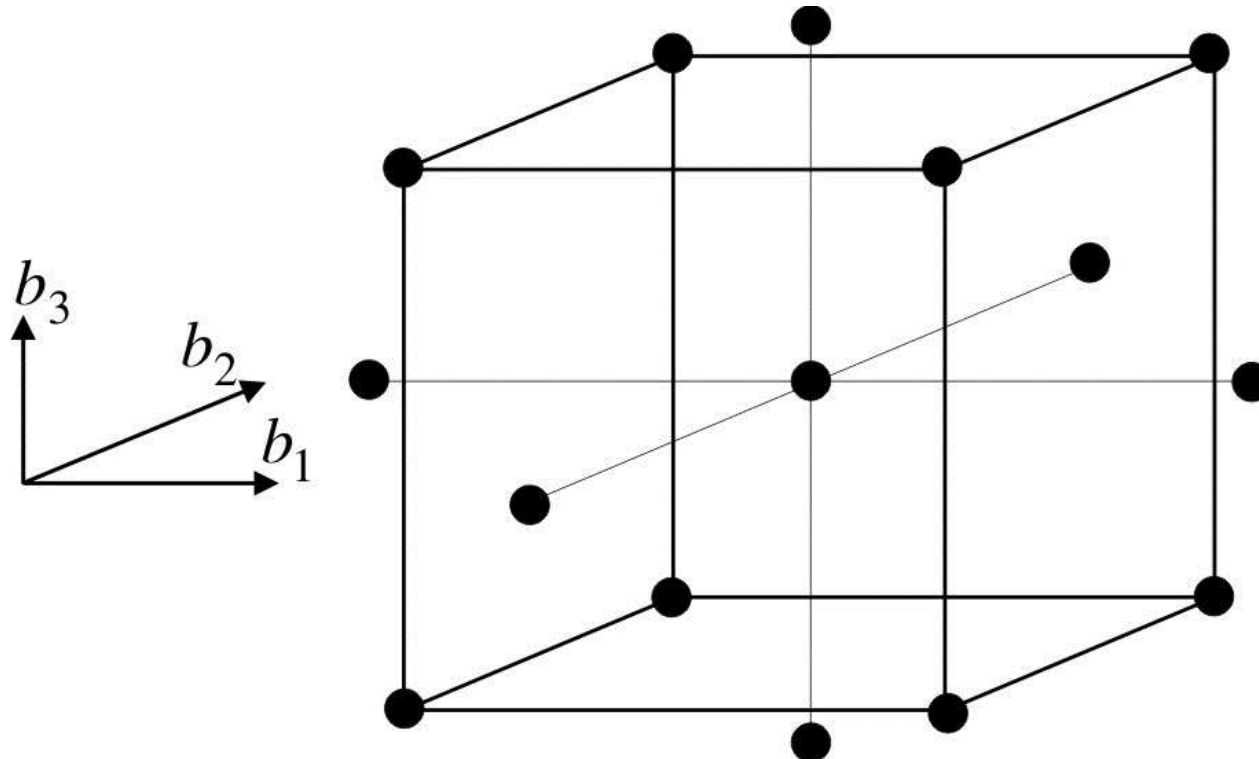
[4,5,6]

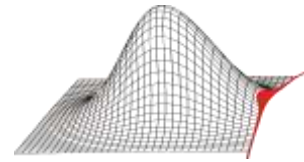




## Central-Composite-Design

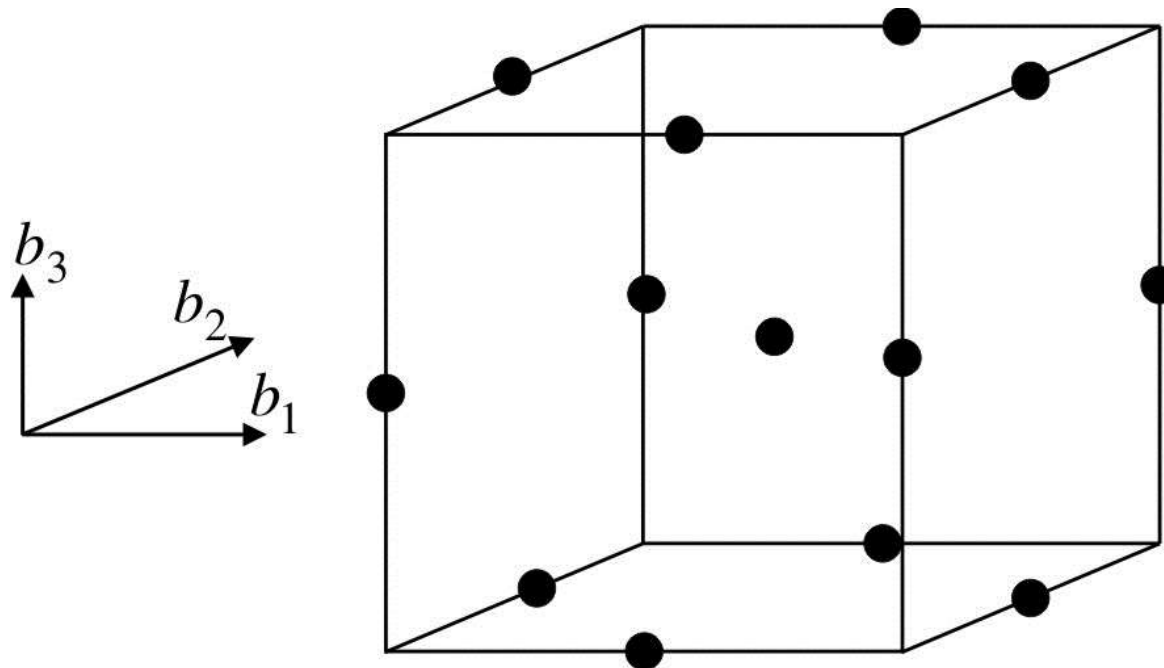
[4,5,6]



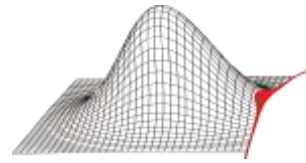


## Box-Behnken-Design

[4,5,6]

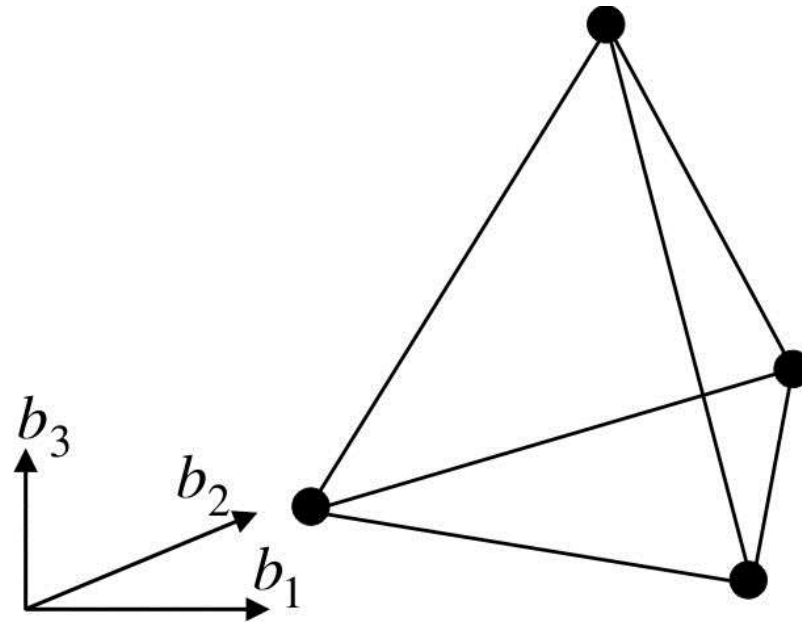


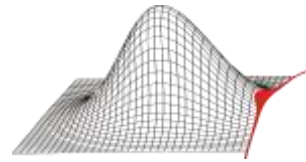




## Simplex-Design

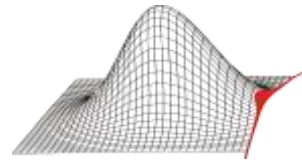
[4,5,6]





Variablenanzahl	Polynom			Simplex	vollfakt. Versuchsplan	CCD	BBD *
	1.Ordnung	2.Ordnung	3.Ordnung				
1	2	3	4				
2	3	6	10	3	5	9	
3	4	10	20	4	9	15	13
4	5	15	35	5	17	25	25
5	6	21	56	6	33	43	41
6	7	28	84	7	65	77	49
7	8	36	120	8	129	143	57
8	9	45	165	9	257	273	113
9	10	55	220	10	513	531	121
10	11	66	286	11	1025	1045	161
11	12	78	364	12	2049	2071	177
12	13	91	455	13	4097	4121	193
13	14	105	560	14	8193	8219	209
14	15	120	680	15	16385	16413	225
15	16	136	816	16	32769	32799	241

\* Bei den Variablenanzahlen 3-7 und 9-12 sind die originalen BBD [7] dargestellt die anderen beruhen auf Veröffentlichungen von Mee [8]



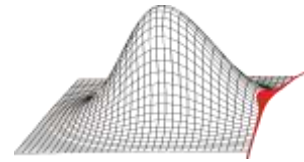
Approximationsfunktion mit Polynomen zweiter Ordnung:

$$y_i = c_0 + c_1 b_{1,i} + c_2 b_{2,i} + c_{11} b_{1,i}^2 + c_{22} b_{2,i}^2 + c_{12} b_{1,i} b_{2,i} + \epsilon.$$

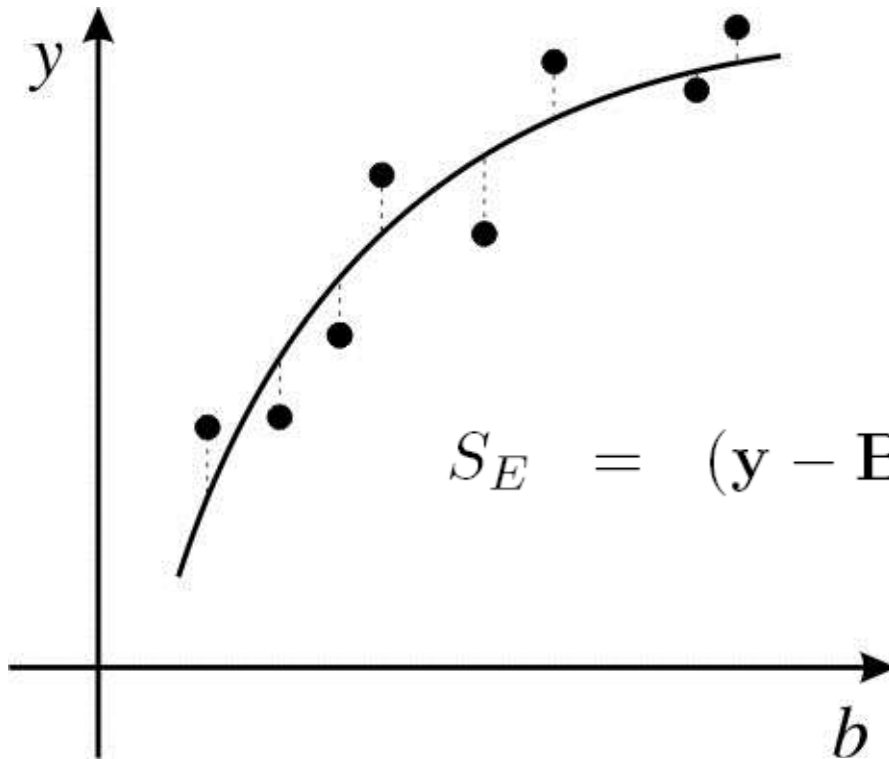
$$\mathbf{y} = \mathbf{BC} + \boldsymbol{\epsilon}.$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n_{sim}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & b_{1,1} & b_{2,1} & b_{1,1}^2 & b_{2,1}^2 & b_{1,1}b_{2,1} \\ 1 & b_{1,2} & b_{2,2} & b_{1,2}^2 & b_{2,2}^2 & b_{1,2}b_{2,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & b_{1,i} & b_{2,i} & b_{1,i}^2 & b_{2,i}^2 & b_{1,i}b_{2,i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & b_{1,n_{sim}} & b_{2,n_{sim}} & b_{1,n_{sim}}^2 & b_{2,n_{sim}}^2 & b_{1,n_{sim}}b_{2,n_{sim}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_{11} \\ c_{22} \\ c_{12} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_{n_{sim}} \end{bmatrix}$$

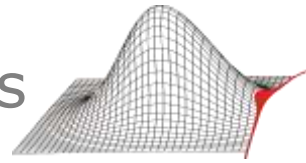


[4,5,6]



$$S_E = (\mathbf{y} - \mathbf{BC})^T (\mathbf{y} - \mathbf{BC}) = \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\epsilon} \longrightarrow \min$$

$$\mathbf{C} = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{y}$$



Bestimmtheitsmaß:  $R^2 = \frac{S_R}{S_y}$  [4,5,6]

Summe der Abweichungsquadrate:

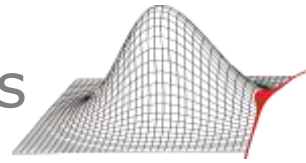
$$S_R = \mathbf{C}^T \mathbf{B}^T \mathbf{y} - \frac{\left( \sum_{i=1}^{n_{sim}} y_i \right)^2}{n_{sim}}$$

Totale Summe der Abweichungsquadrate:

$$S_y = S_R + S_E$$

Summe der Quadrate der Approximationsfehler:

$$S_E = \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \mathbf{C}^T \mathbf{B}^T \mathbf{y}$$



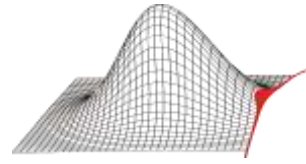
Das Bestimmtheitsmaß  $R^2$  beschreibt den Anteil der Varianz von  $\mathbf{y}$ , der durch die Eingangsgrößen  $\mathbf{b}$  erklärt wird.

[4,5,6]

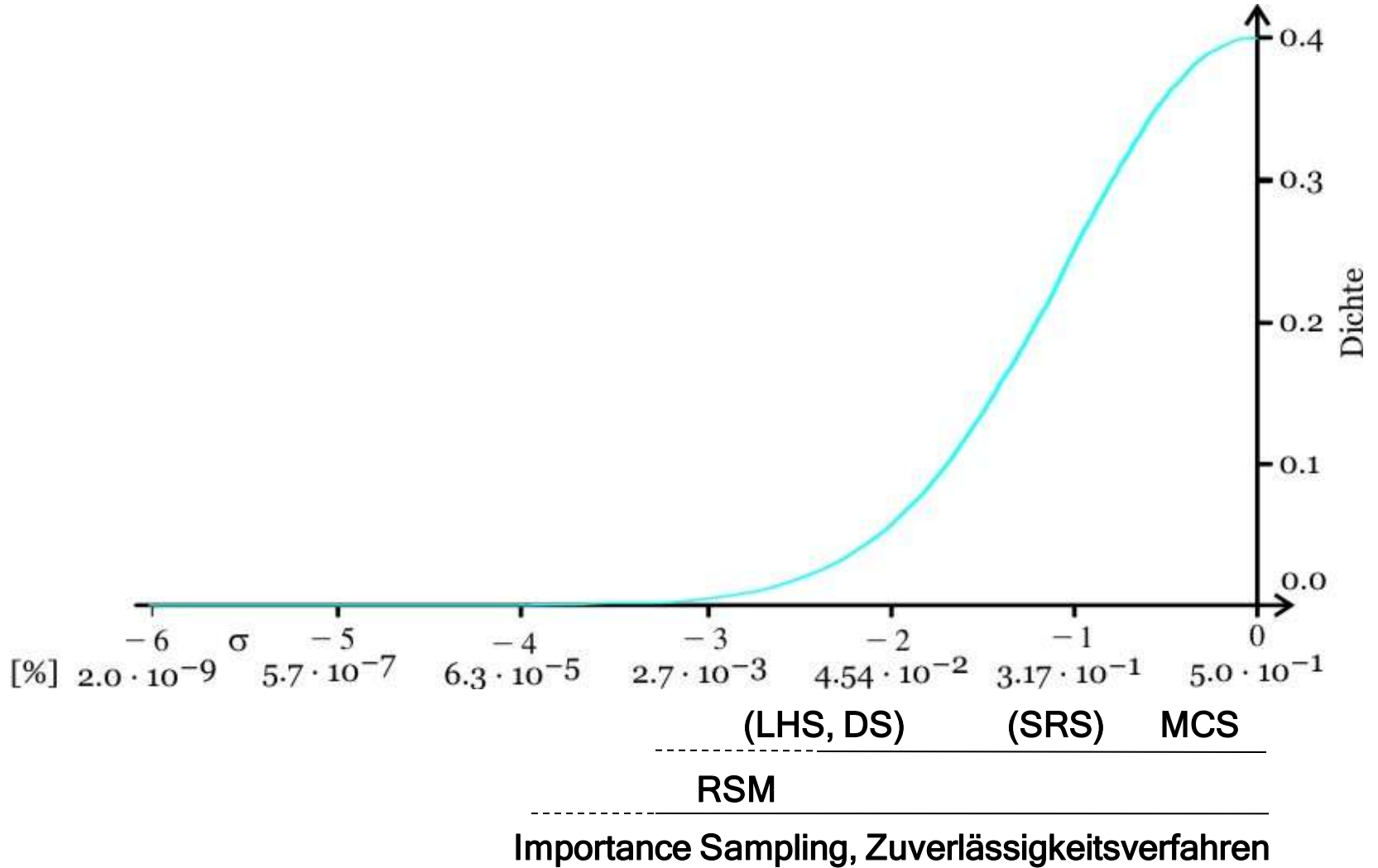
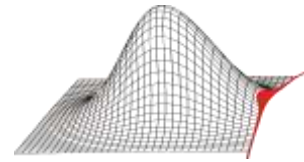
$$R = |r_{\mathbf{y}, \tilde{\mathbf{y}}}|$$

korrigiertes Bestimmtheitsmaß:

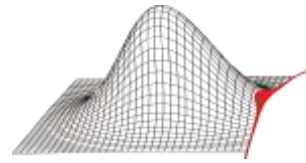
$$R_{adj}^2 = 1 - \frac{\frac{S_E}{n_{sim} - n_{koe}}}{\frac{S_y}{n_{sim} - 1}} = 1 - \left( \frac{n_{sim} - 1}{n_{sim} - n_{koe}} \right) (1 - R^2)$$



- Einleitung
- Theoretische Grundlagen der Statistik
- Probabilistische Methoden
- **Mögliche Ergebnisse von probabilistischen Untersuchungen**
- Mögliche Fehlerquellen bei probabilistischen Untersuchungen
- Zusammenfassung







Notwendige Anzahl der deterministischen Rechnungen:

**MCS:** SRS  $n_{sim} \approx \frac{100}{\tilde{P}_f}$       LHS, DS  $n_{sim} \approx \frac{10}{\tilde{P}_f}$

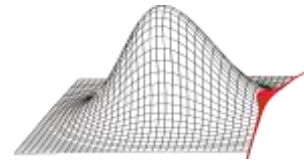
- RSM:**
- Stark abhängig von der Variablenanzahl
  - Größer bei unbekannter Lage der Versagensfunktion
  - Betrachtung jeweils nur einer Ergebnisgröße möglich

### **Importance Sampling:**

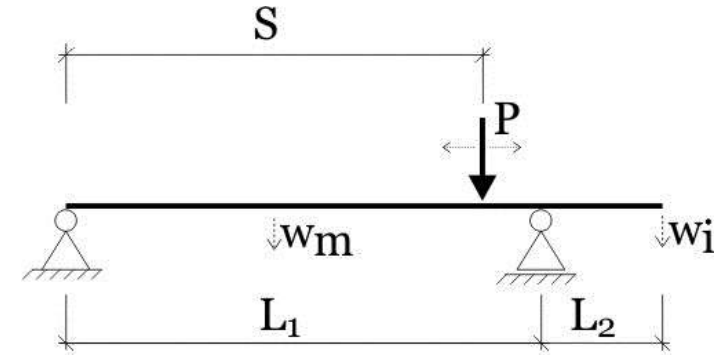
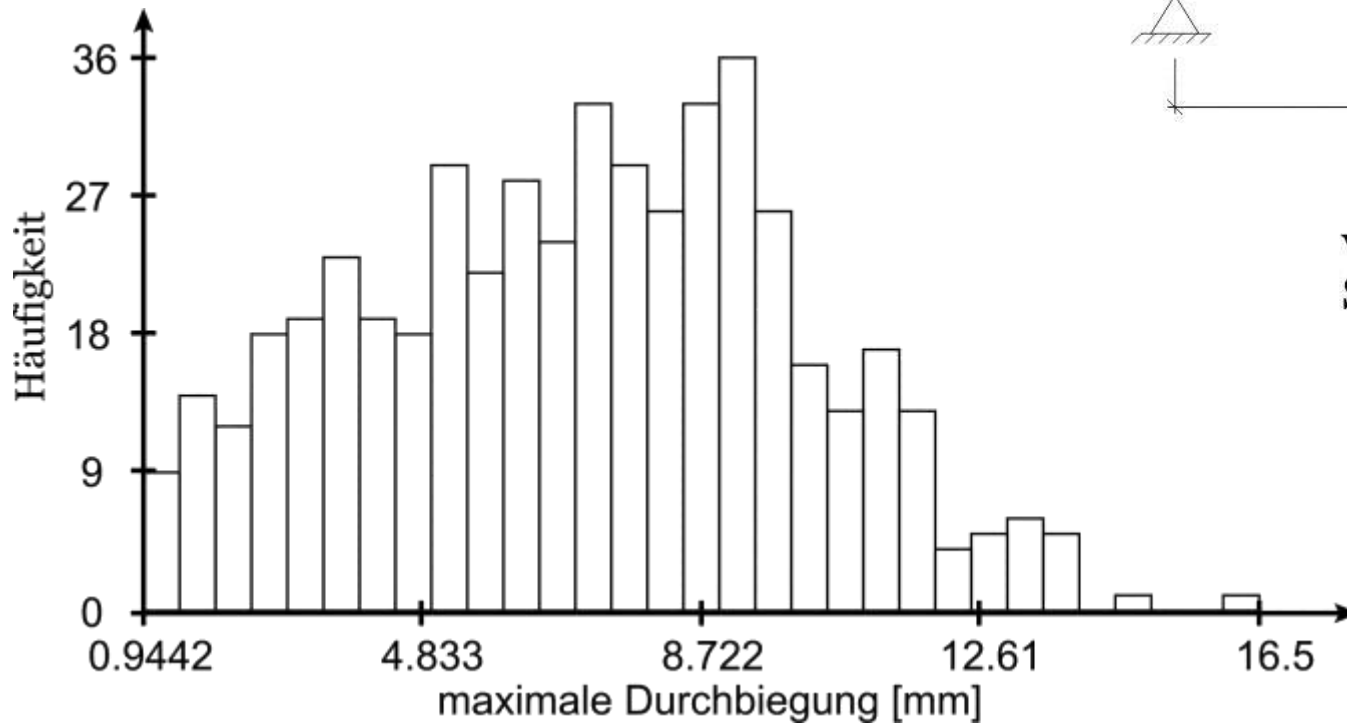
- Größer bei unbekannter Lage der Versagensfunktion
- Betrachtung jeweils nur einer Ergebnisgröße möglich

### **Zuverlässigkeitsverfahren:**

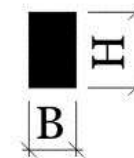
- Betrachtung jeweils nur einer Ergebnisgröße möglich
- Numerische Probleme bei stark nichtlinearen Versagensfunktionen

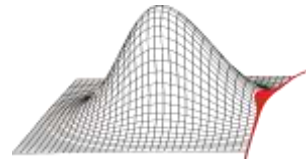


## Histogramm



vergrößerte  
Seitenansicht





Monte-Carlo-Simulation



Für jede deterministische  
Rechnung innerhalb der MCS:  
Auslesen der Ergebnisgröße an  
allen Knoten des FE-Modells.



Statistische Auswertung aller  
Werte

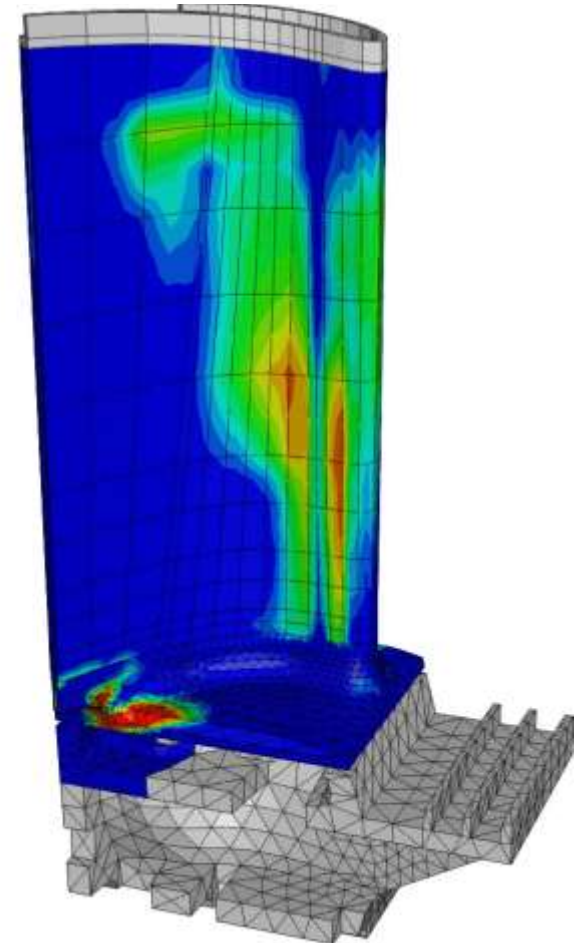
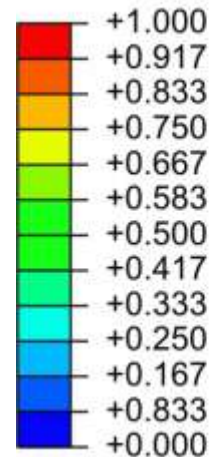


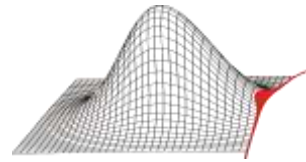
Hinzufügen der statistischen  
Ergebnisse zu einer Datenbank



Graphische Auswertung im  
3D-Viewer

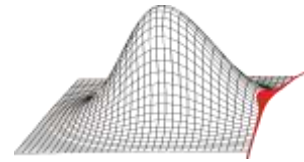
Farbkontur: Relative Häufigkeit  
einer speziellen Zyklenzahl



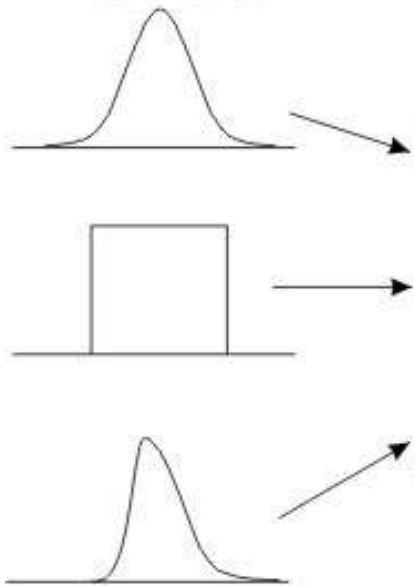


[12]

- Ingenieurmäßige (deterministische) Maße:
  - Überschreiten von Grenzwerten
  - Auftreten von unerwünschten plötzlichen Änderungen der Ergebnisgrößen (z.B. lokales Maximum der Ergebnisgröße)
  - Ansprechen von Systeminstabilitäten (z.B.: Beulen)
- Statistische Maße
  - Lage der Mittelwerte der Ergebnisgrößen
  - Größe der Variationskoeffizienten der Ergebnisgrößen

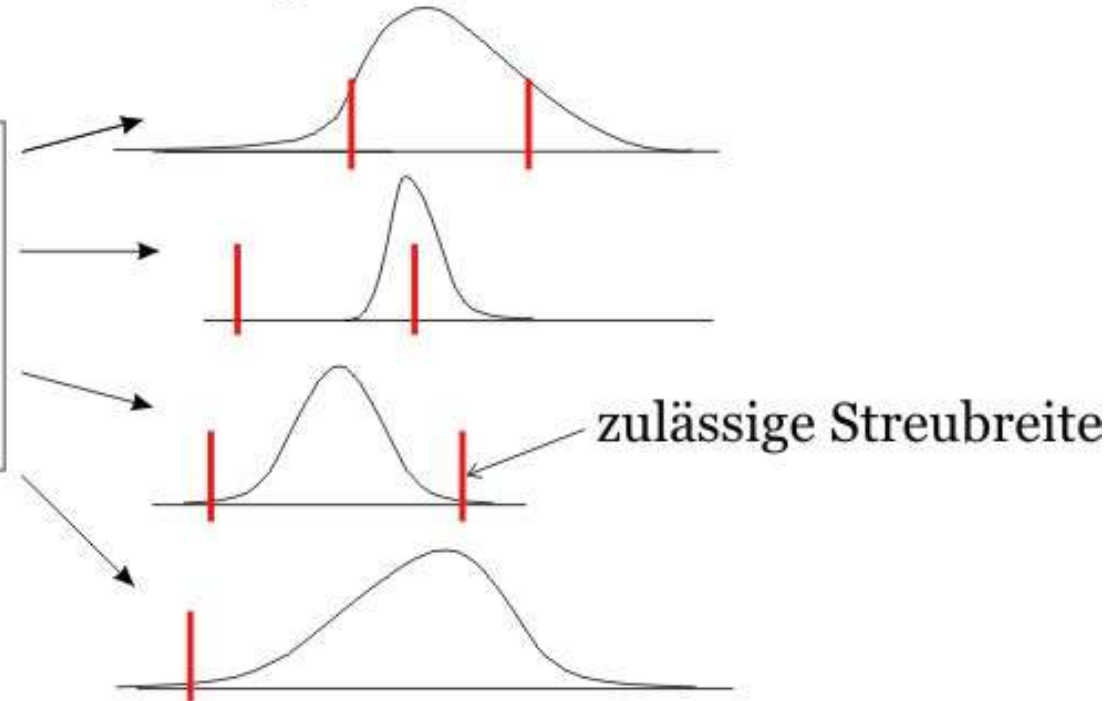


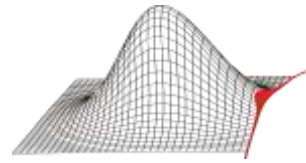
Eingangsgrößen



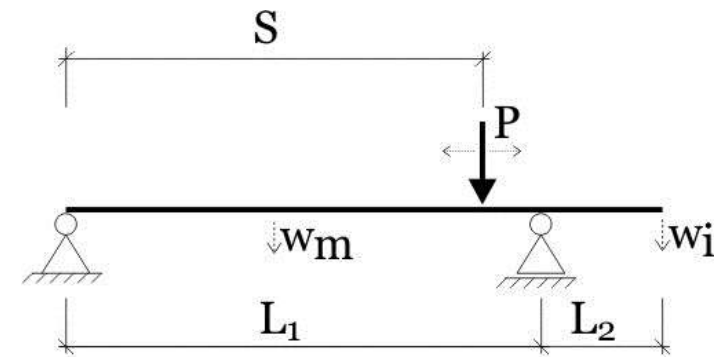
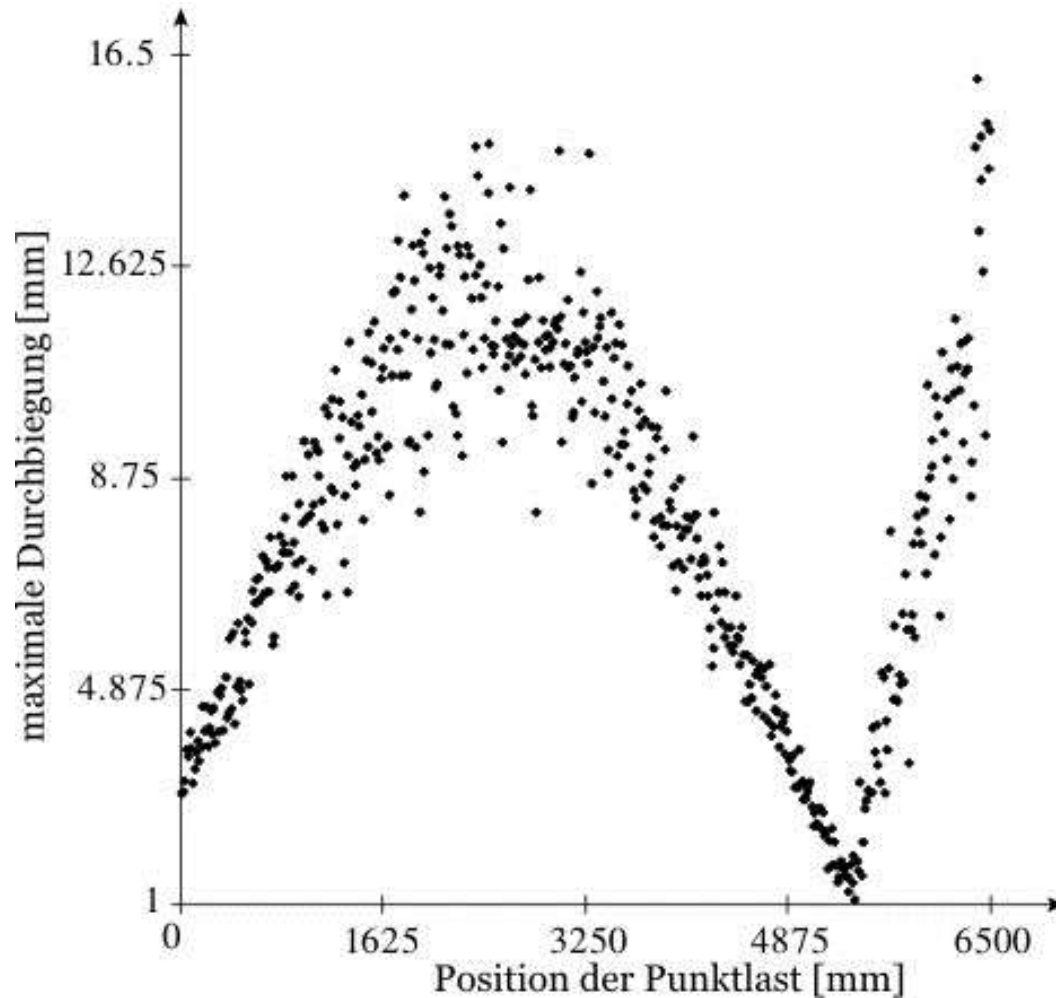
deterministisches  
Modell

Ergebnisgrößen

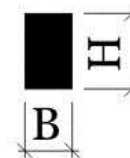


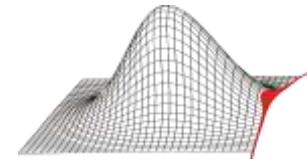


## Verzweigungssystem

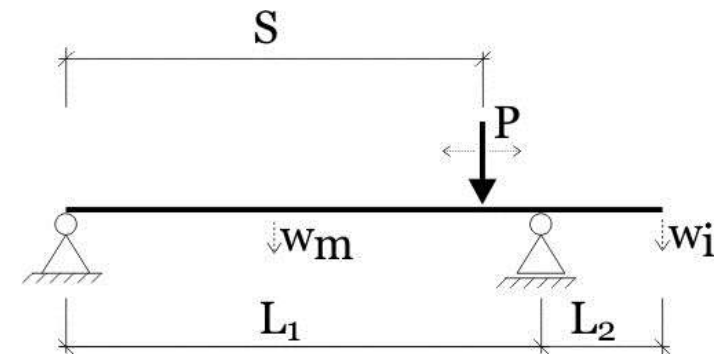
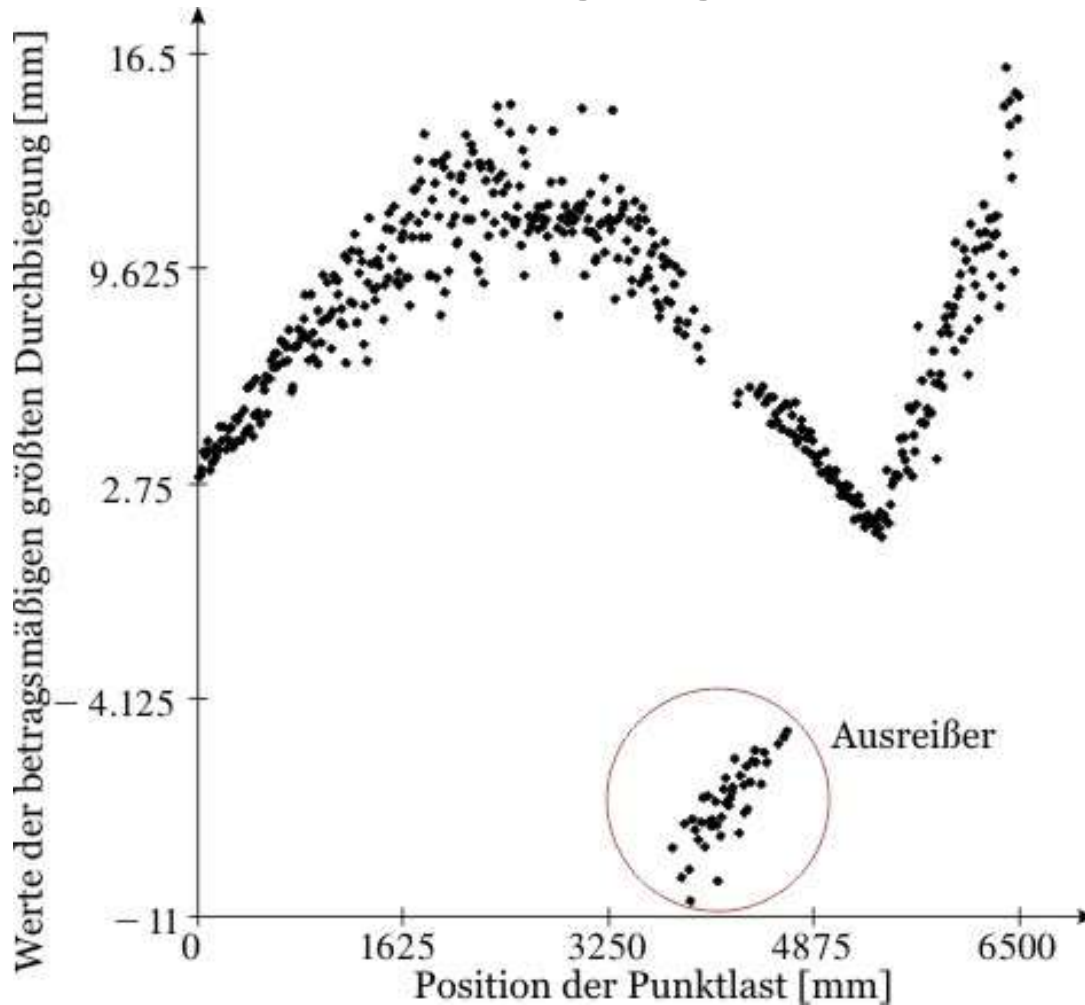


vergrößerte  
Seitenansicht

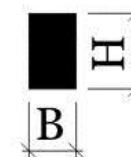


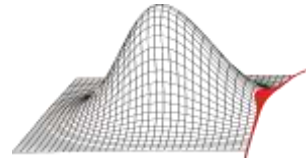


## Verzweigungssystem mit Ausreißern



vergrößerte  
Seitenansicht





Notwendige Anzahl der det. Rechnungen bei einer MCS:

Überschreiten von Grenzwerten, Auftreten von unerwünschten plötzlichen Änderungen der Ergebnisgrößen, Ansprechen von Systeminstabilitäten:

- Abhängig von der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

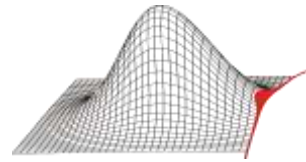
Lage der Mittelwerte der Ergebnisgrößen:

- $\approx 30 \dots 50$

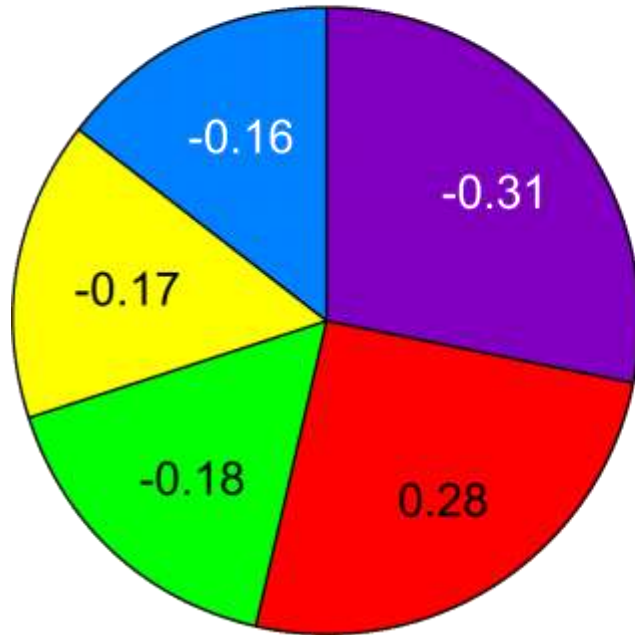
Größe der Variationskoeffizienten der Ergebnisgrößen:

- $\approx 50 \dots 100$

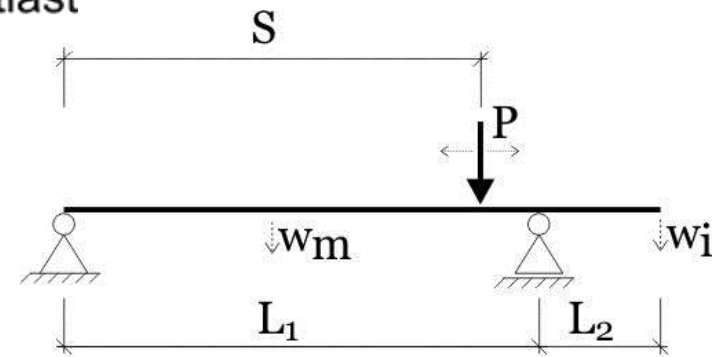




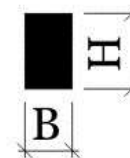
Target-Variable: max.  $w$



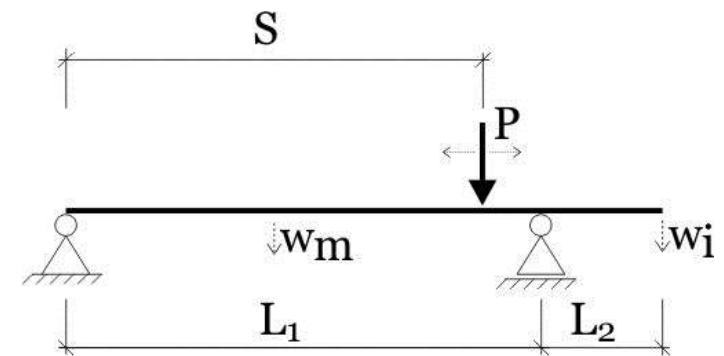
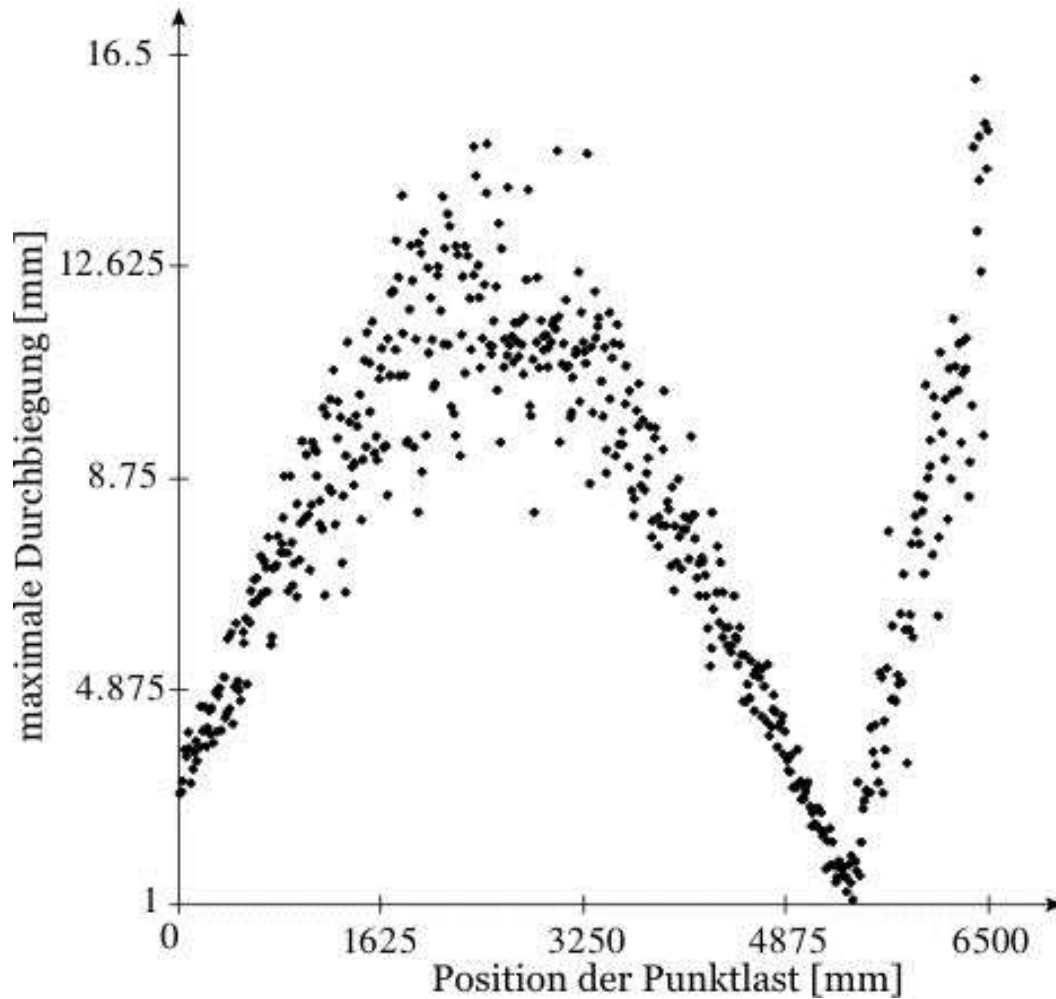
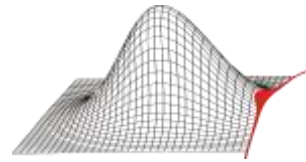
- Höhe
- Punktlast
- Position der Punktlast
- E-Modul
- Breite



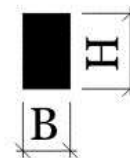
vergrößerte  
Seitenansicht

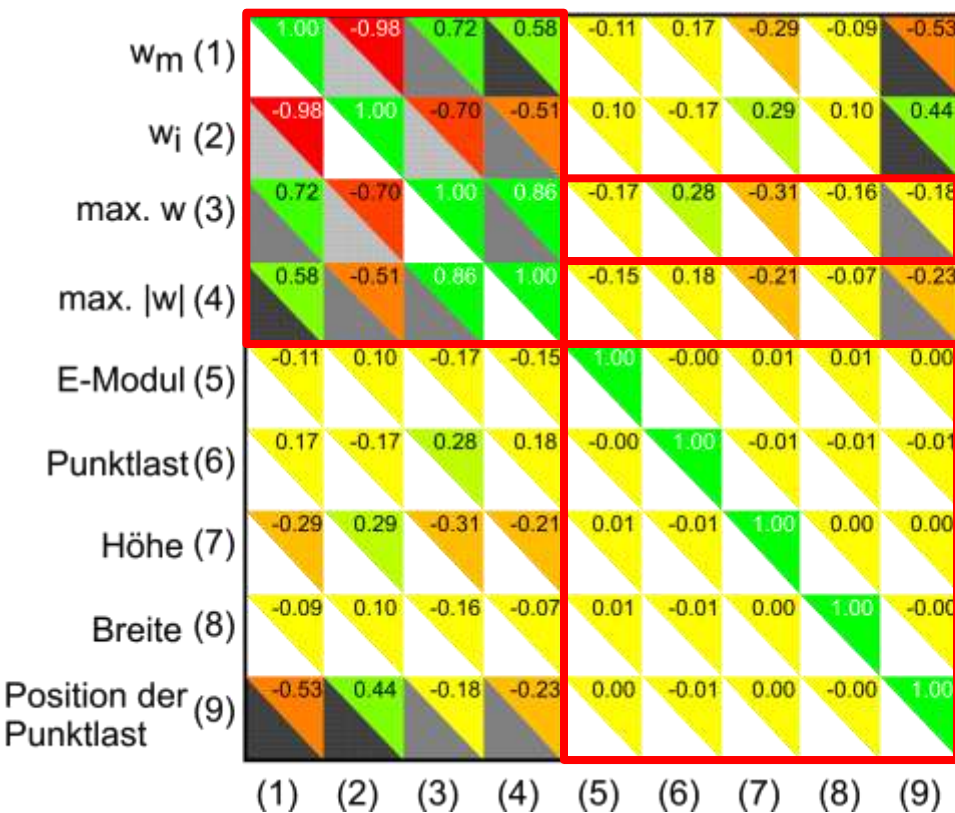
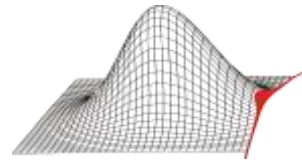


$$r_{i,rel} = \frac{|r_i|}{\sum_{i=1}^{n_b} |r_i|}$$

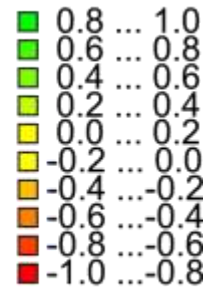


vergrößerte  
Seitenansicht

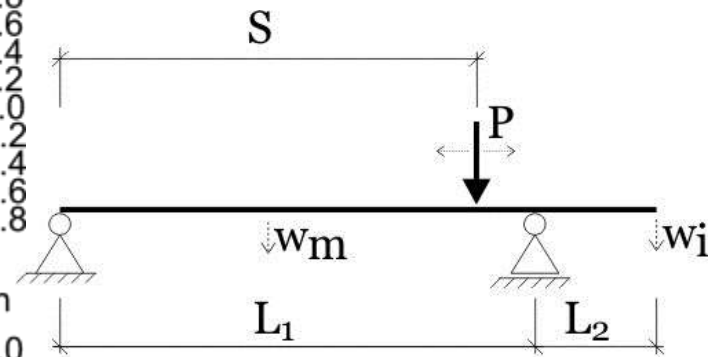
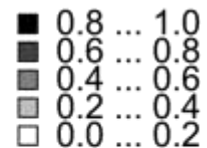




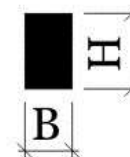
Spearman

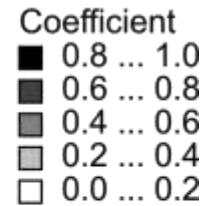
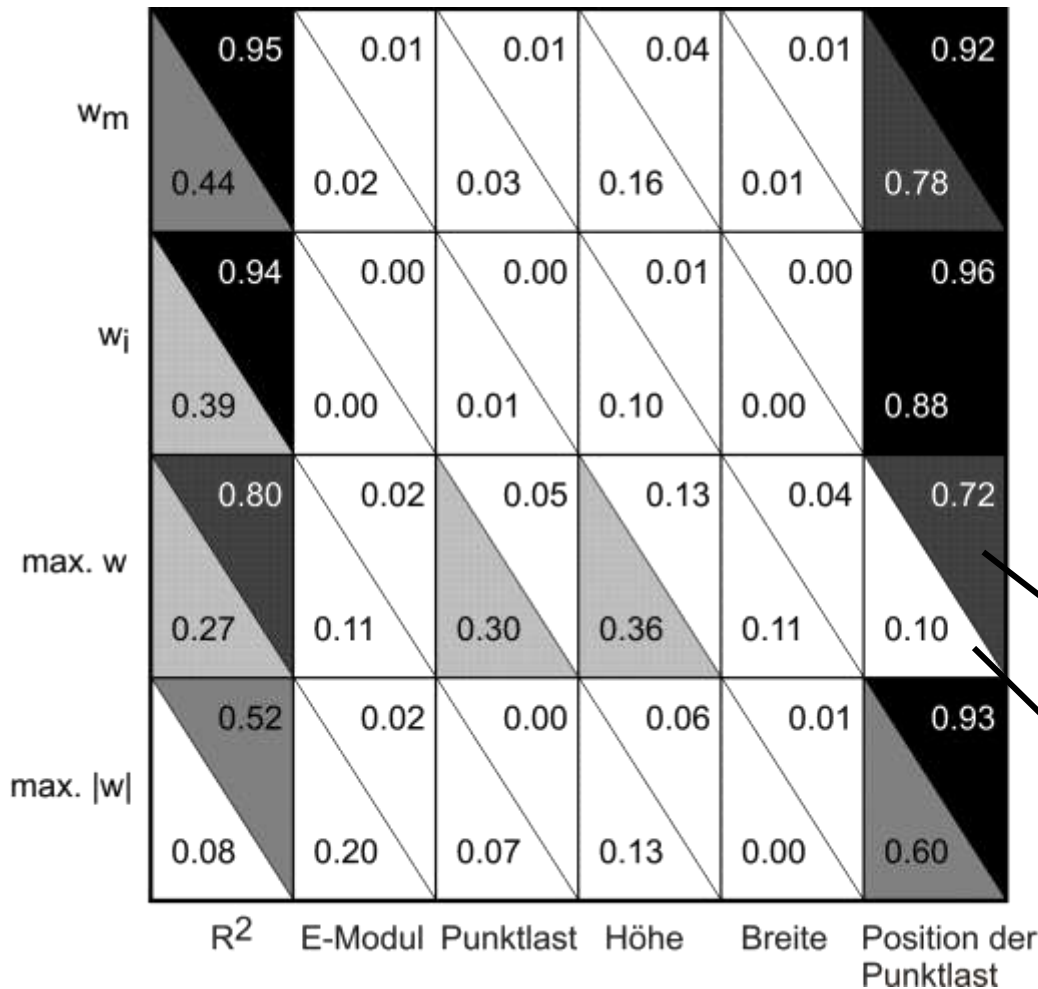
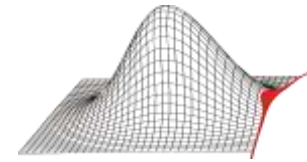


Nonlinear Correlation



vergrößerte  
Seitenansicht



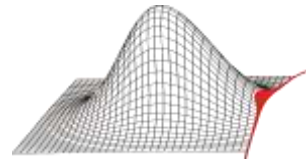


[15]

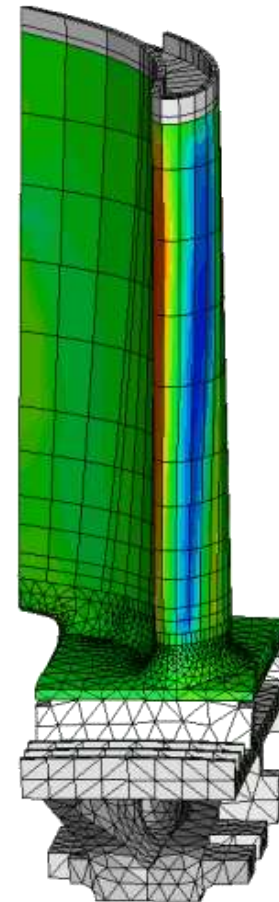
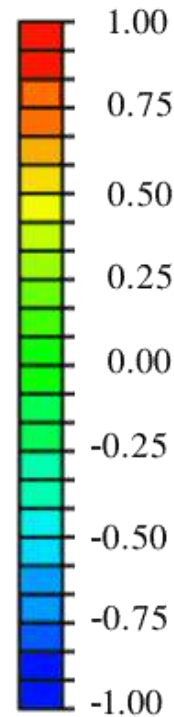
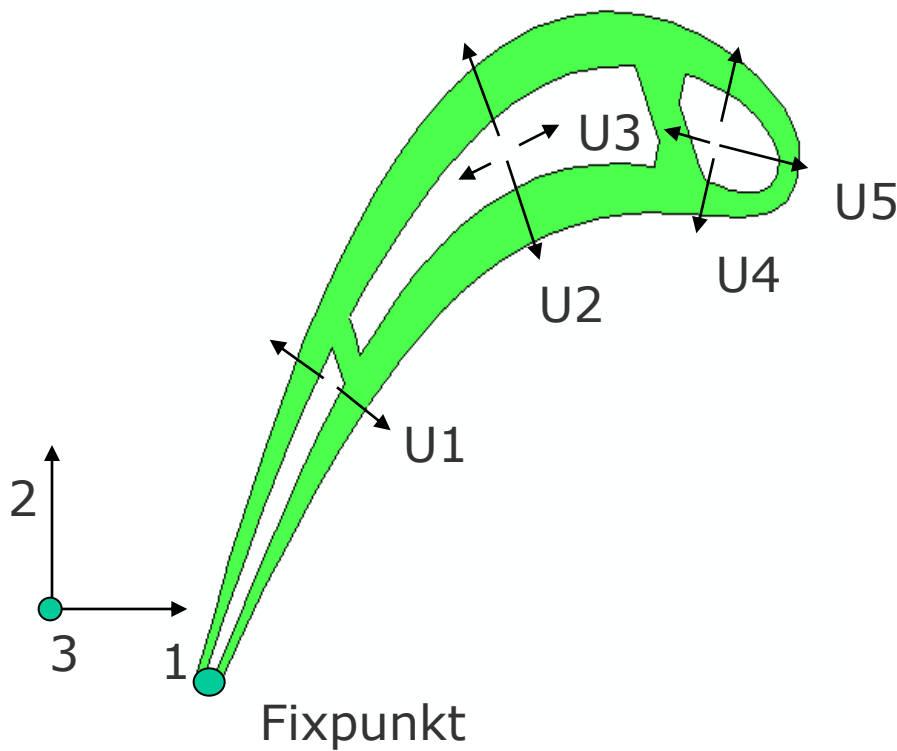
$$COI_e = 1 - \frac{R_e^2}{R^2}$$

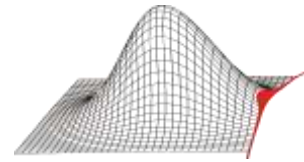
Antwortfläche dritter Ordnung

Antwortfläche erster Ordnung

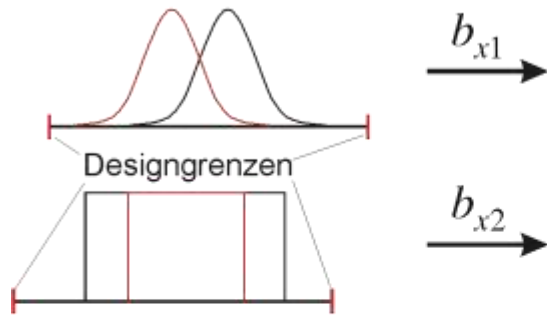


## Farbkontur: Rangkorrelation zwischen der Kernverschiebung U4 und der Zyklenzahl

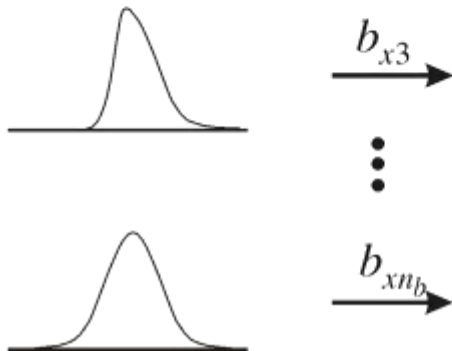




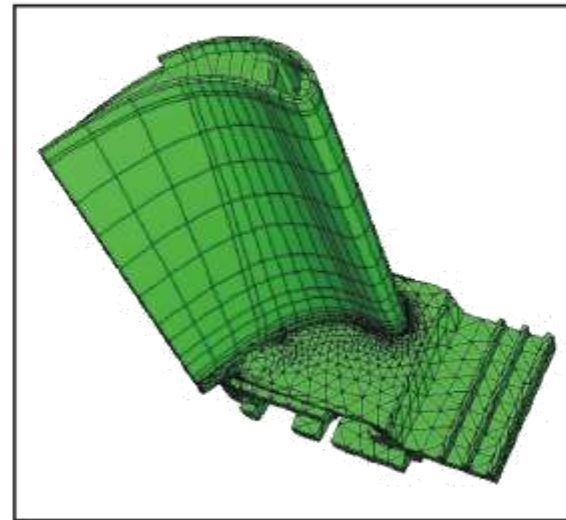
## probabilistische Design-Eingangsgrößen



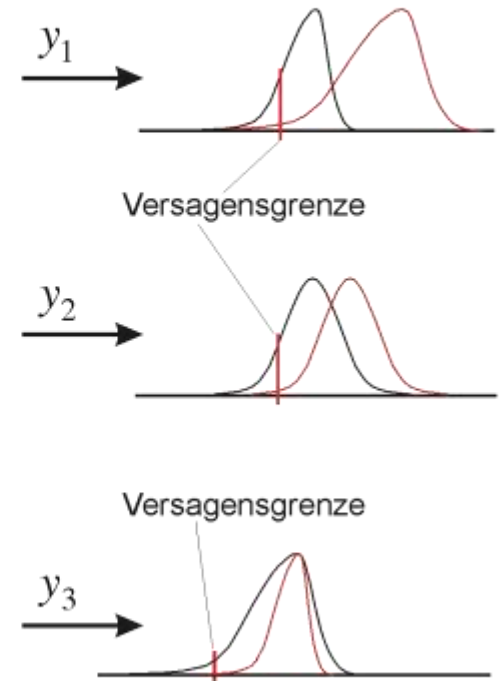
## probabilistische Eingangsgrößen

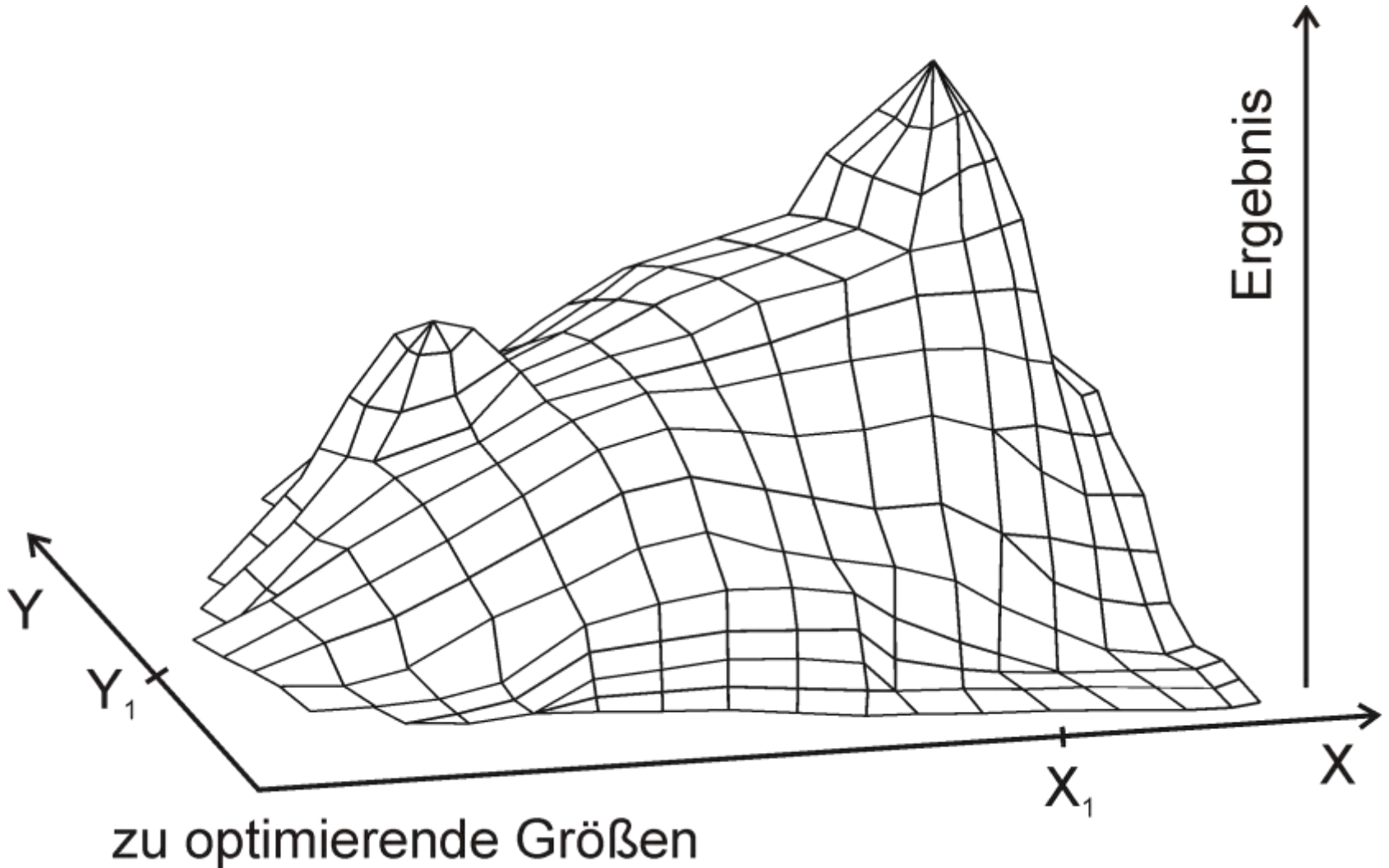
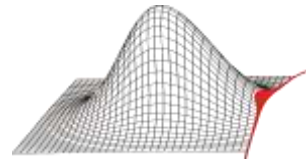


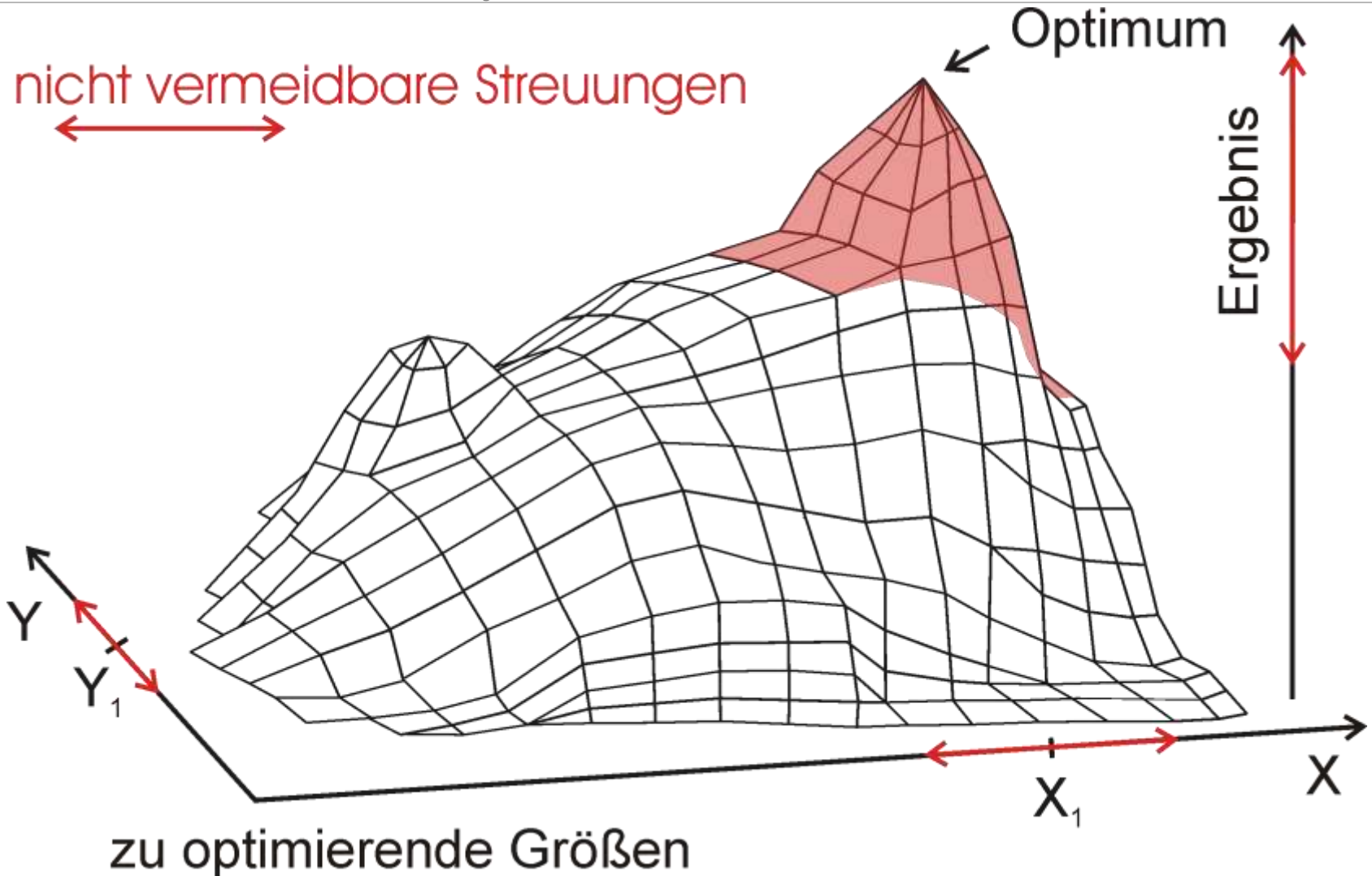
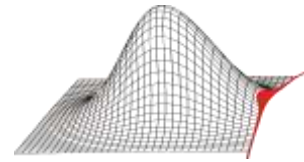
## deterministisches Modell



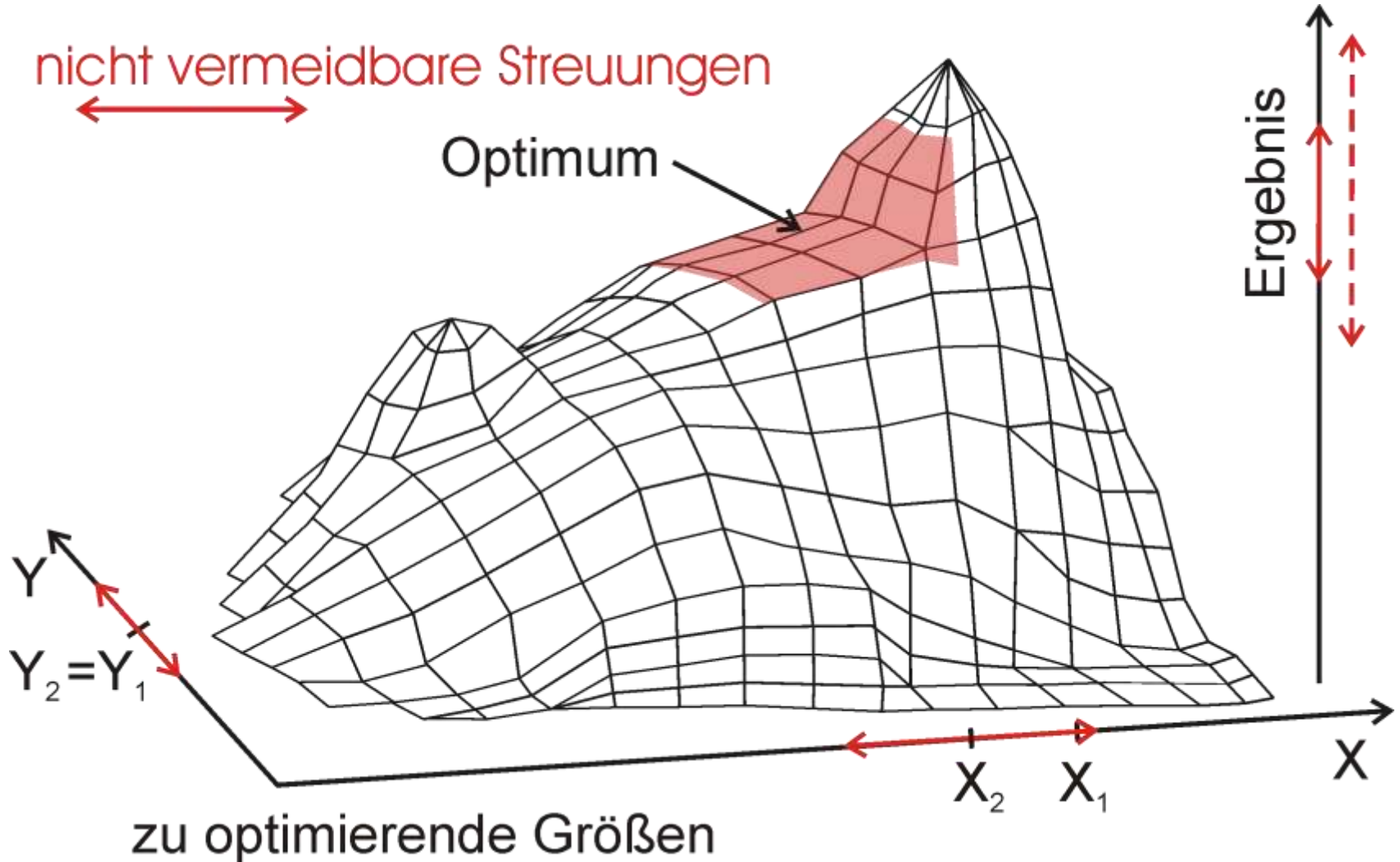
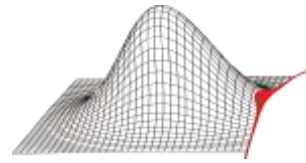
## Beispiele für das Verhalten der Ergebnisgrößen

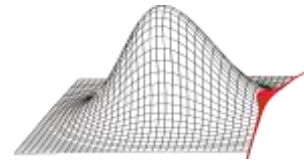




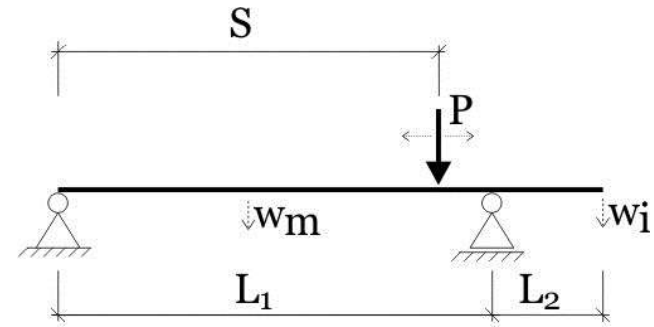
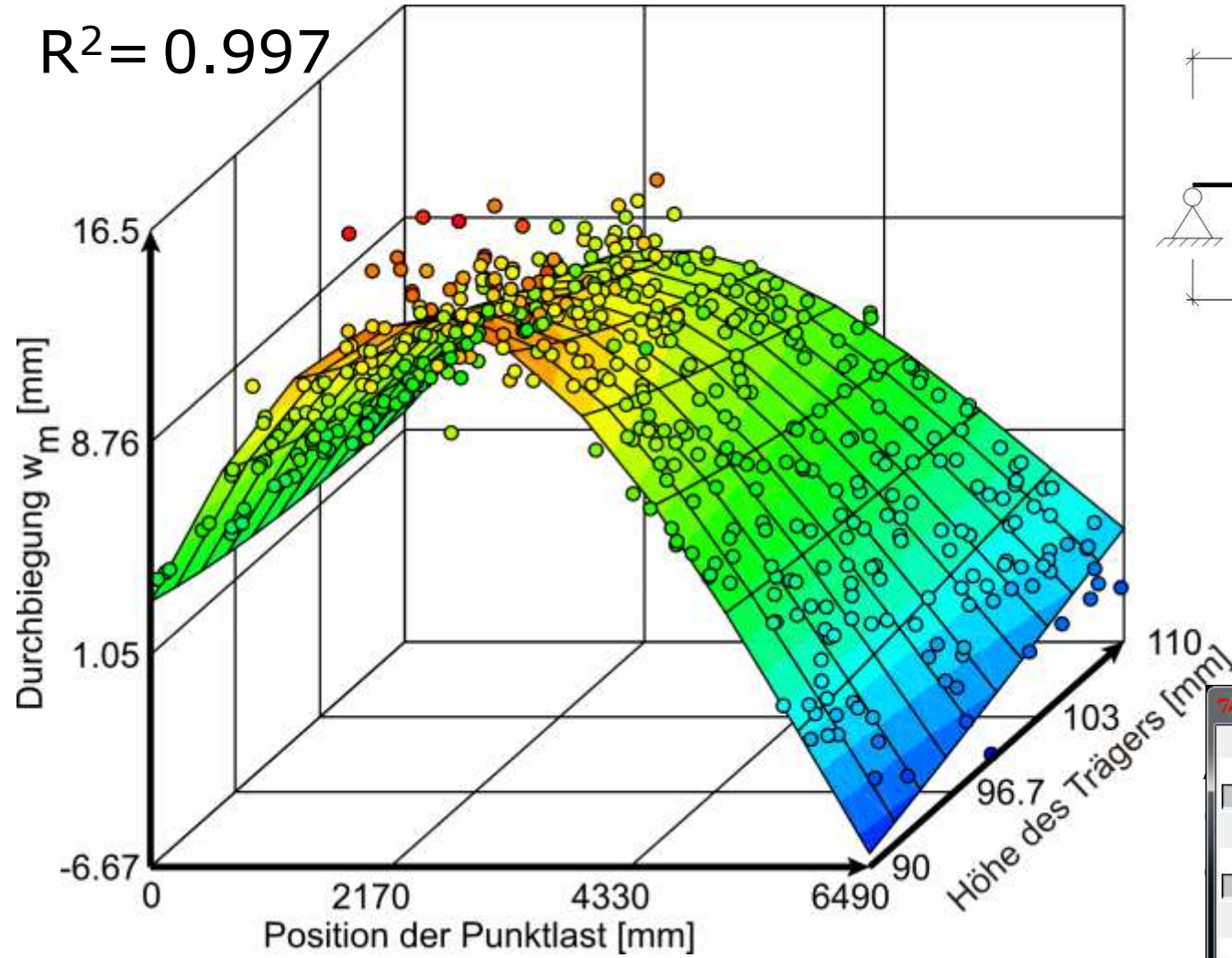




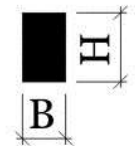




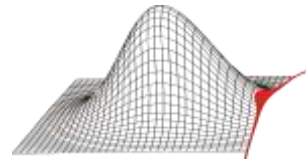
$R^2 = 0.997$



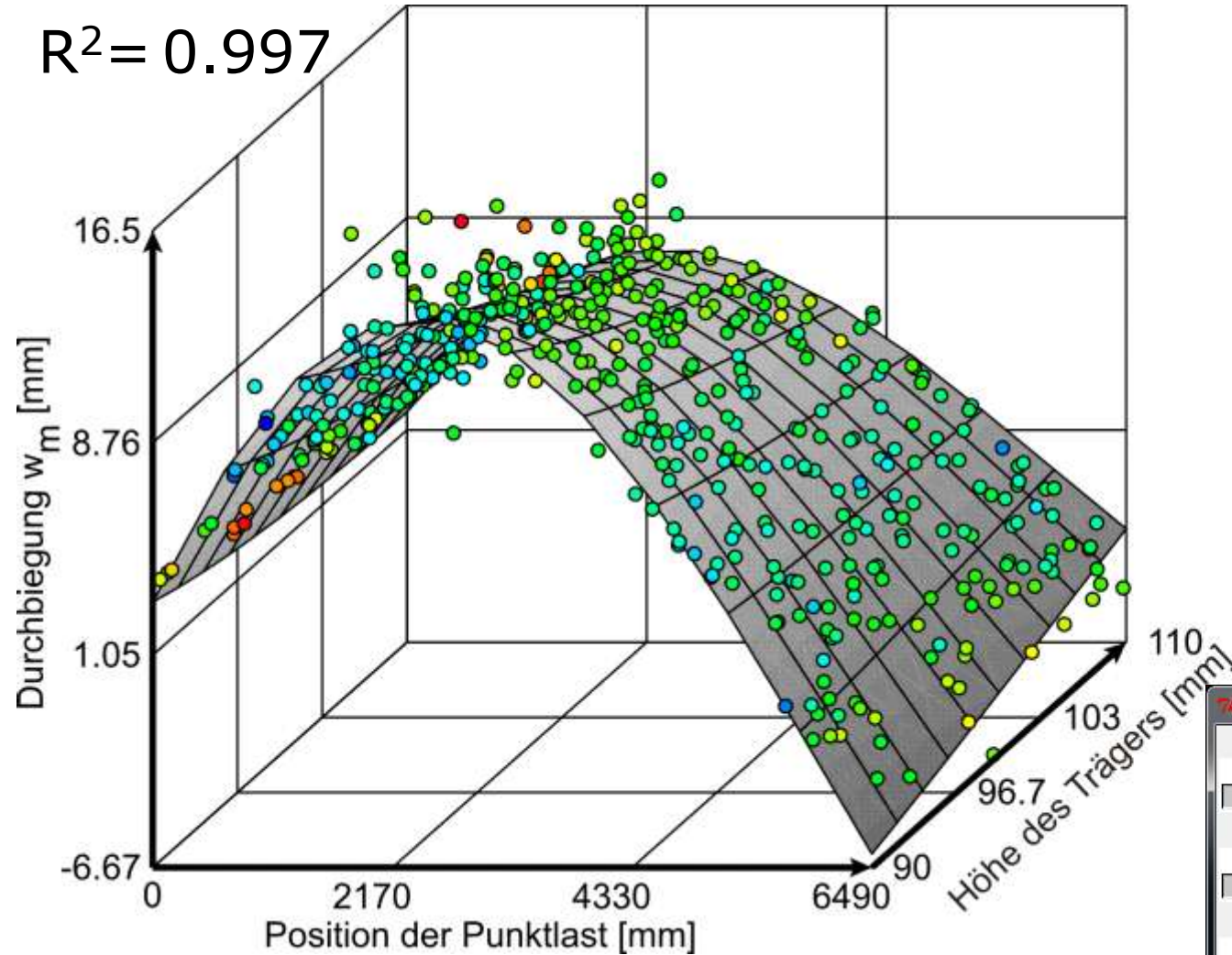
vergrößerte Seitenansicht



Slide Control Input Data = ...0224061_Traeg...	
E_Modul	209226
Kraft	2473
Breite	49.9

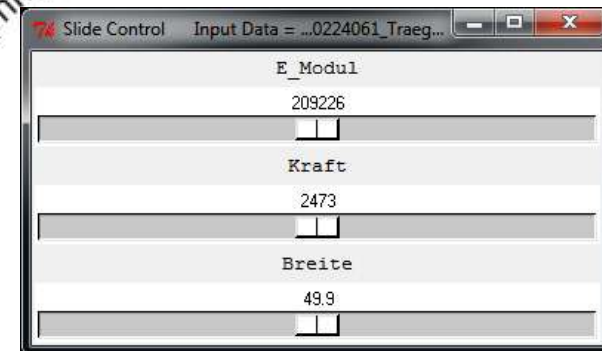


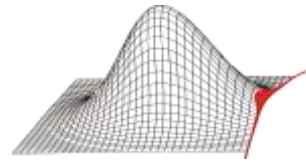
$R^2 = 0.997$



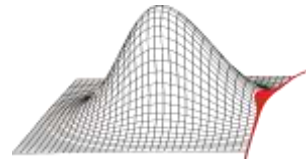
Color information:  
Signed error

- 0.725 ... 0.883
- 0.567 ... 0.725
- 0.408 ... 0.567
- 0.250 ... 0.408
- 0.092 ... 0.250
- 0.066 ... 0.092
- 0.224 ... -0.066
- 0.383 ... -0.224
- 0.541 ... -0.383
- 0.699 ... -0.541





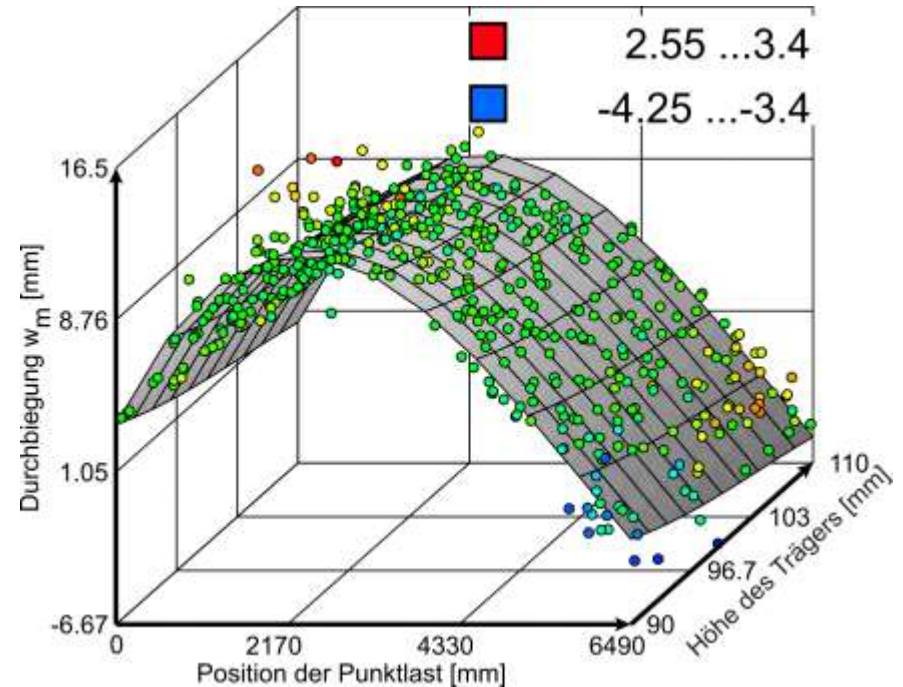
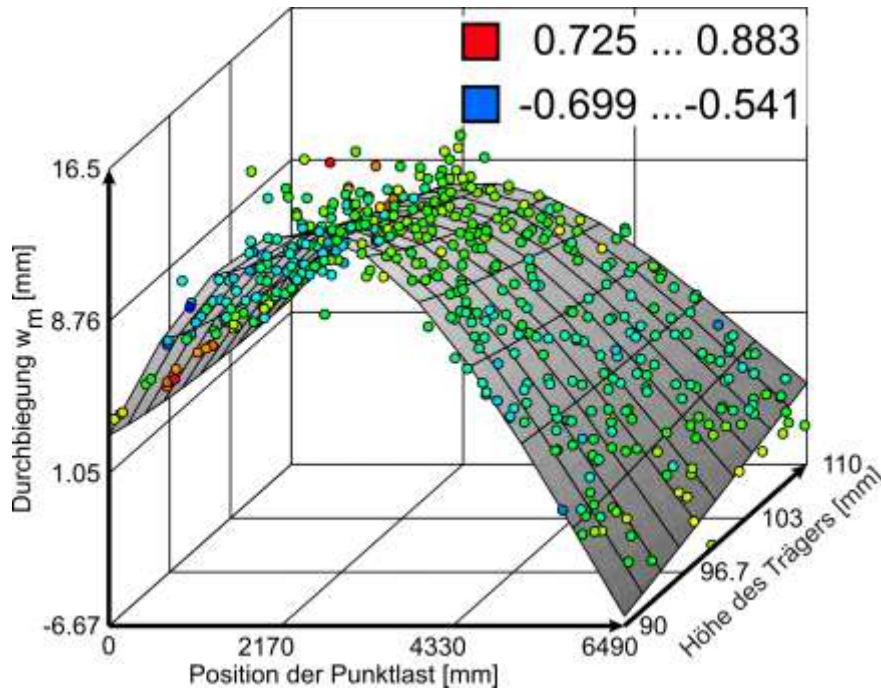
- Einleitung
- Theoretische Grundlagen der Statistik
- Probabilistische Methoden
- Mögliche Ergebnisse von probabilistischen Untersuchungen
- **Mögliche Fehlerquellen bei probabilistischen Untersuchungen**
- Zusammenfassung



R<sup>2</sup> = 0.997

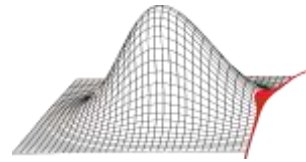
n<sub>sim</sub> = 500

R<sup>2</sup> = 0.923



Antwortfläche dritter Ordnung mit gemischten Termen und Box-Cox-Transformation

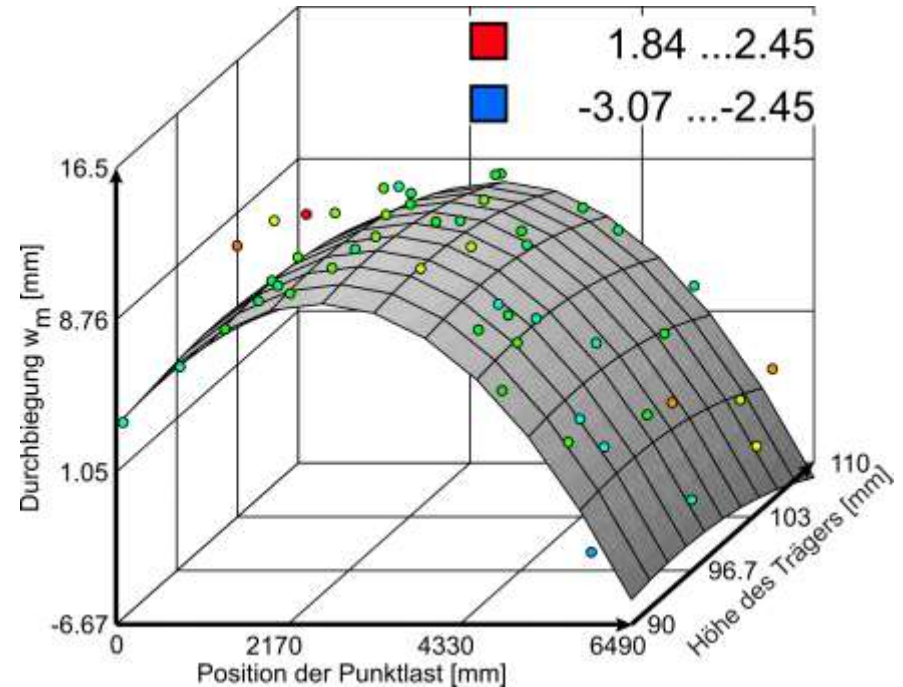
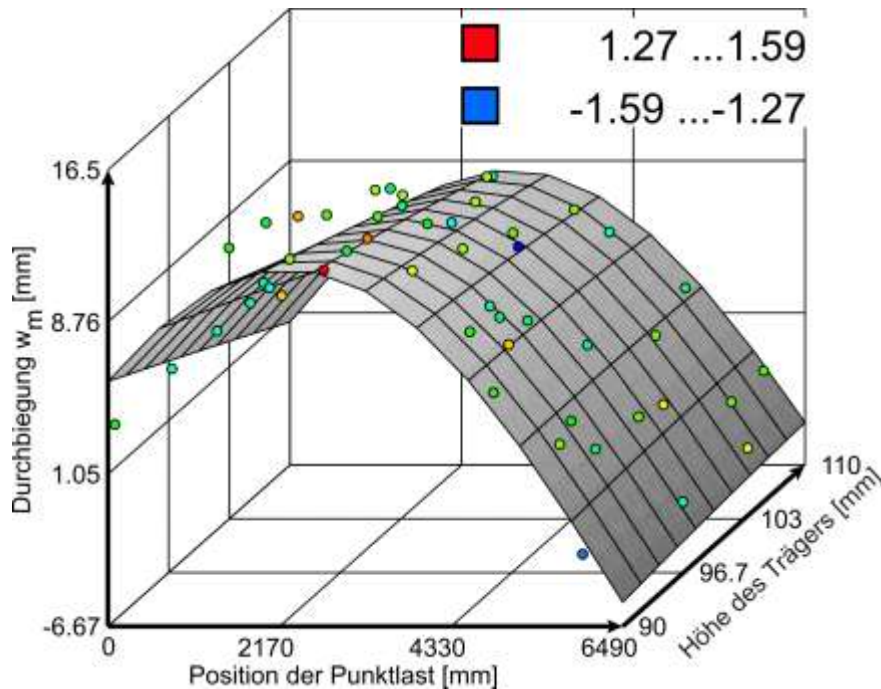
Antwortfläche zweiter Ordnung ohne gemischten Terme



R<sup>2</sup> = 0.980

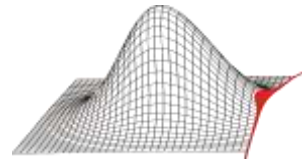
n<sub>sim</sub> = 50

R<sup>2</sup> = 0.943

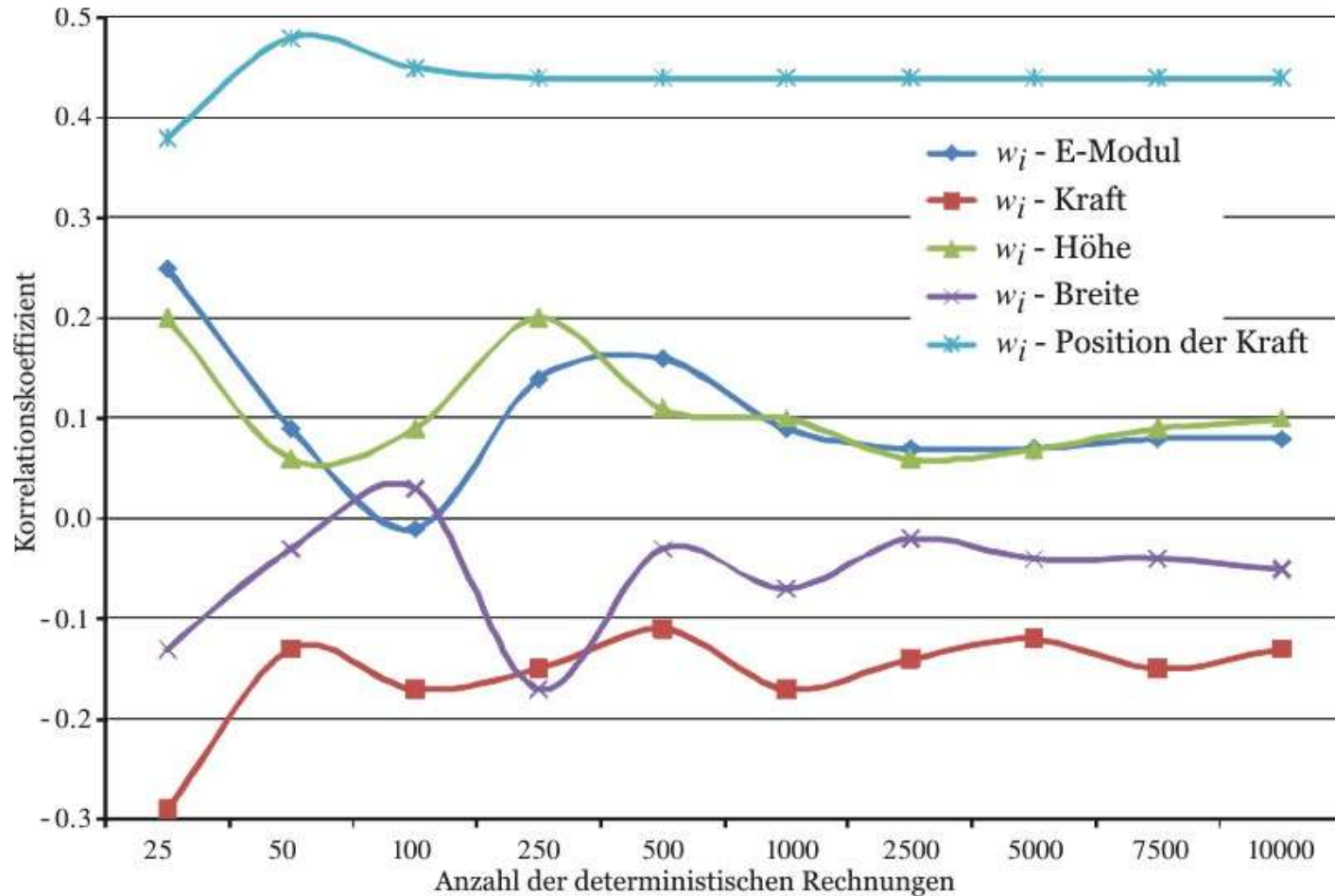


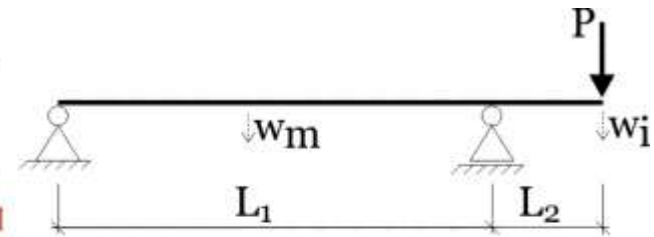
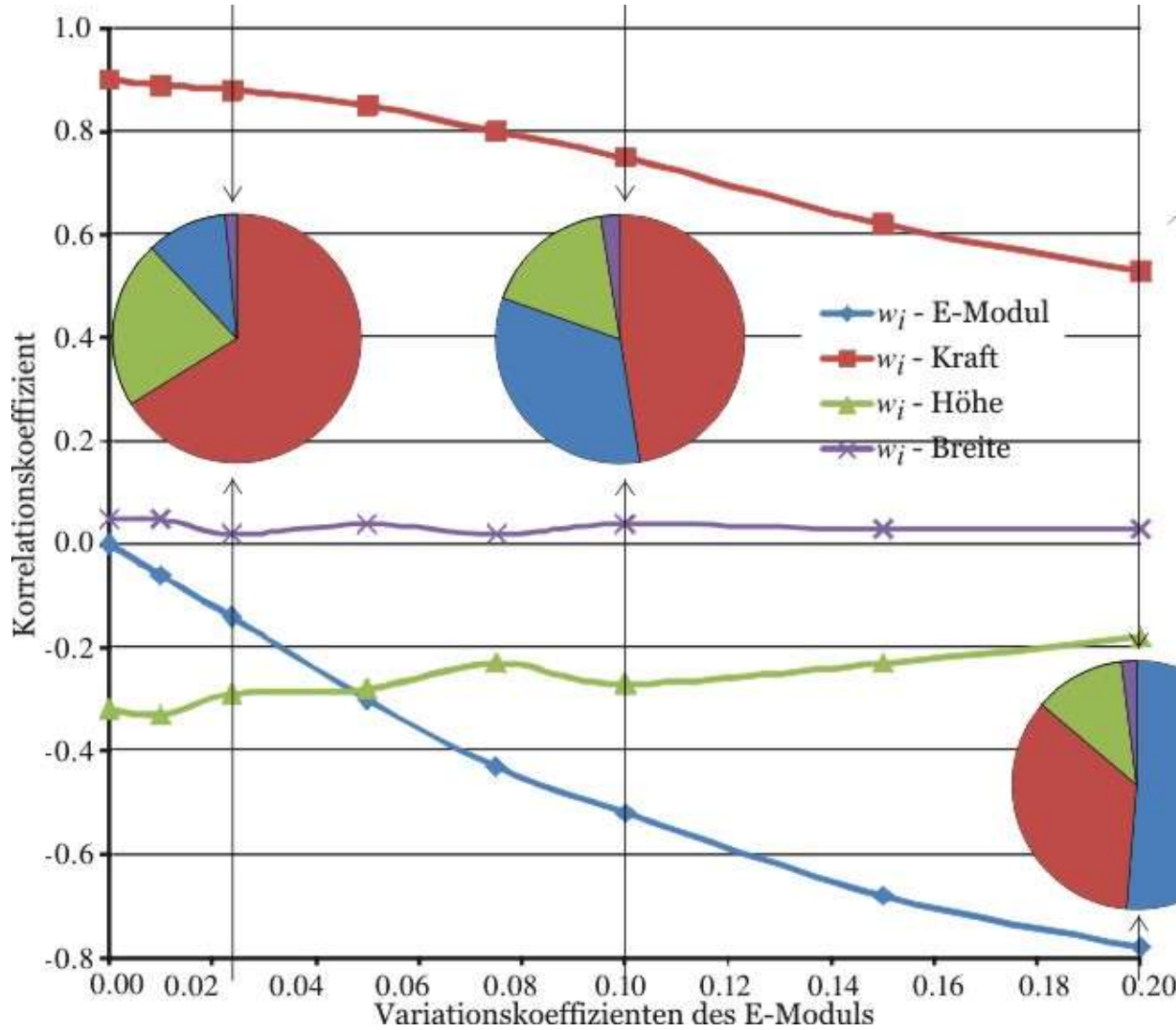
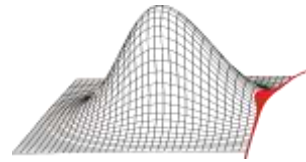
Antwortfläche zweiter Ordnung  
mit gemischten Termen und  
Box-Cox-Transformation

Antwortfläche zweiter Ordnung  
ohne gemischten Terme

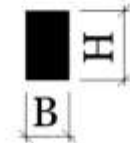


Notwendige Anzahl der det. Rechnungen bei einer MCS ist abhängig von den Beträgen der zu ermittelnden Korrelationskoeffizienten

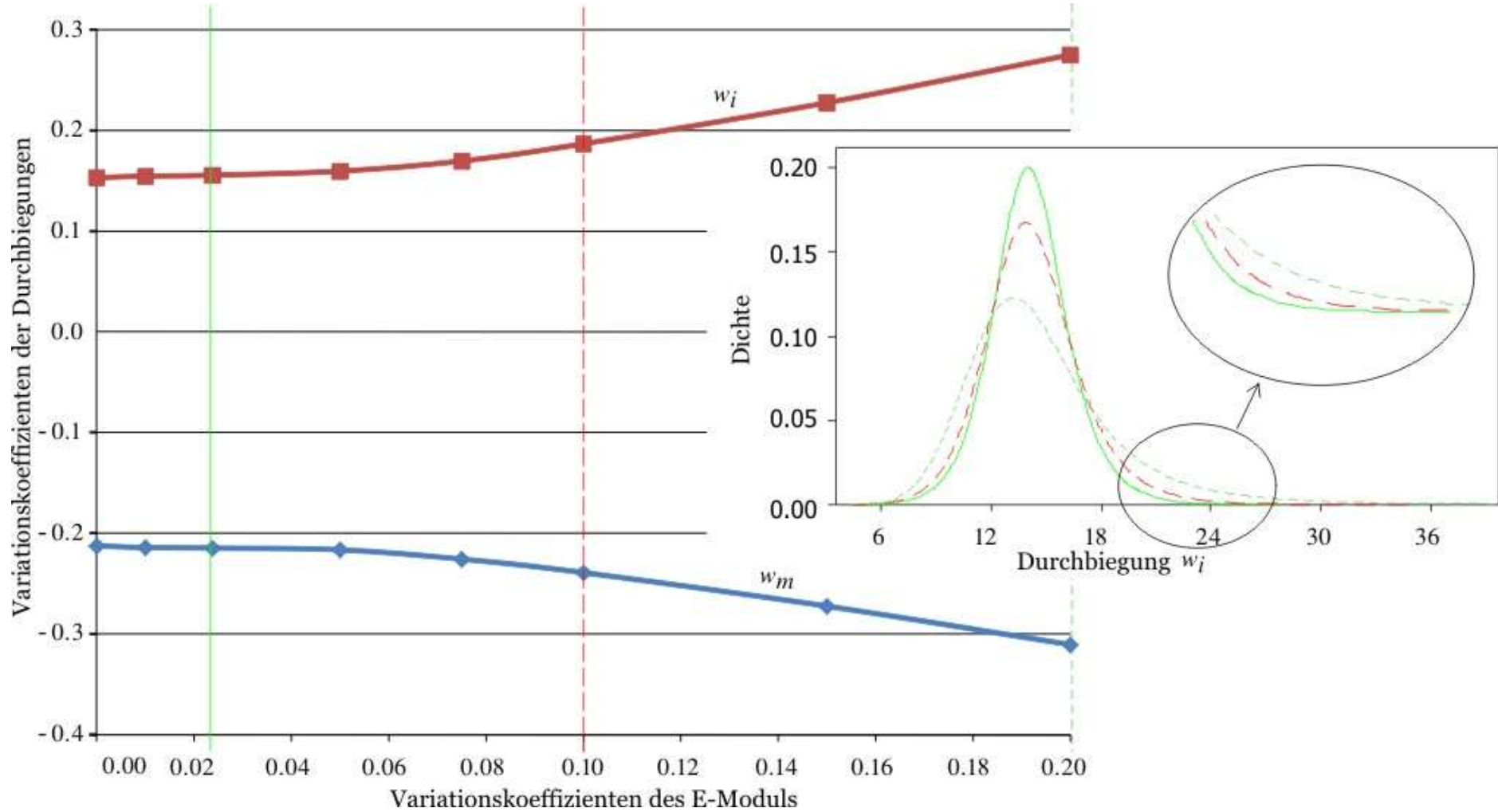
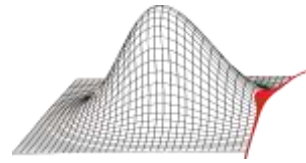


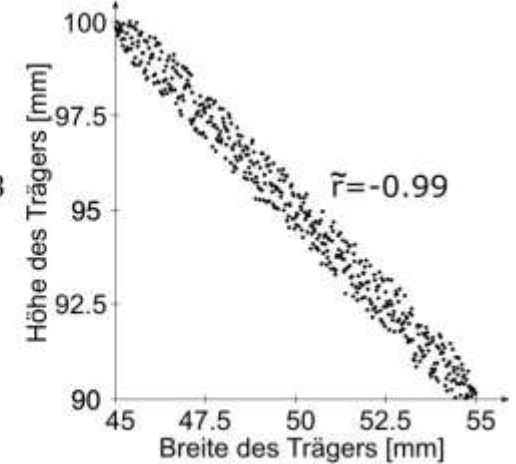
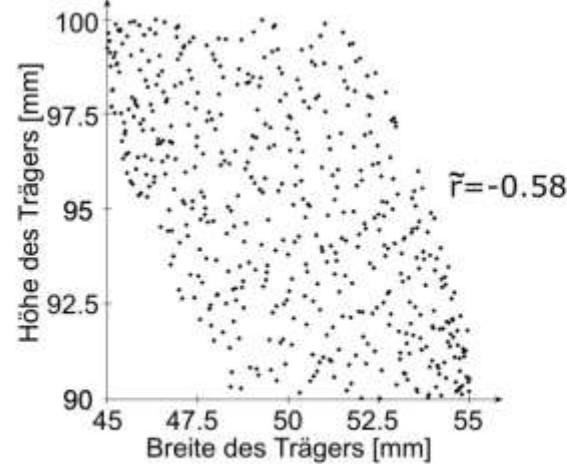
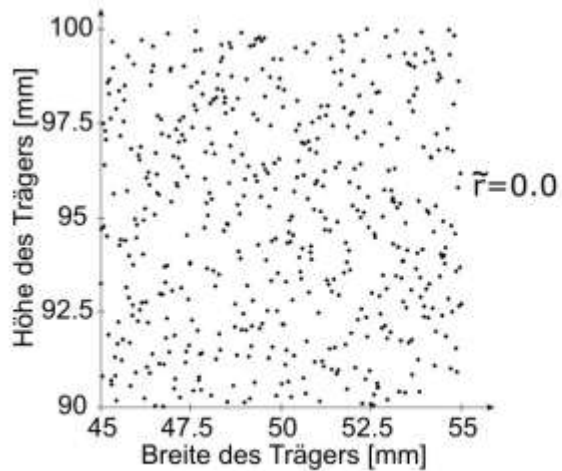
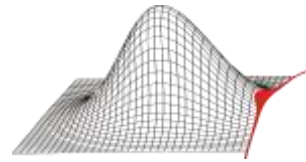


vergrößerte  
Seitenansicht

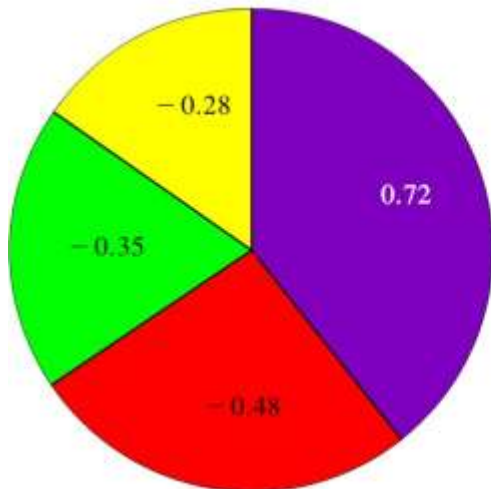






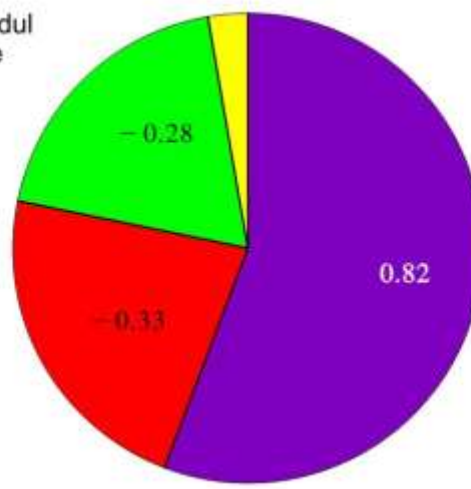


Target-Variable:  $w_j$

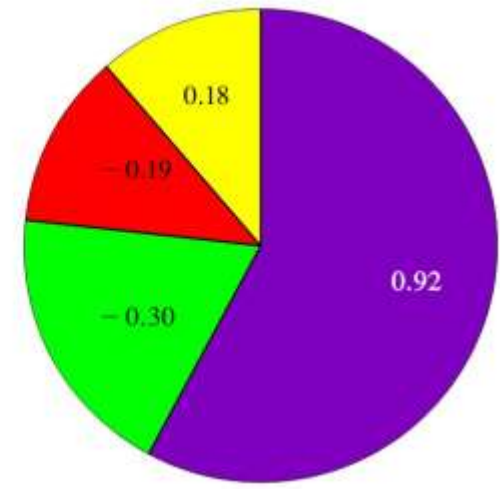


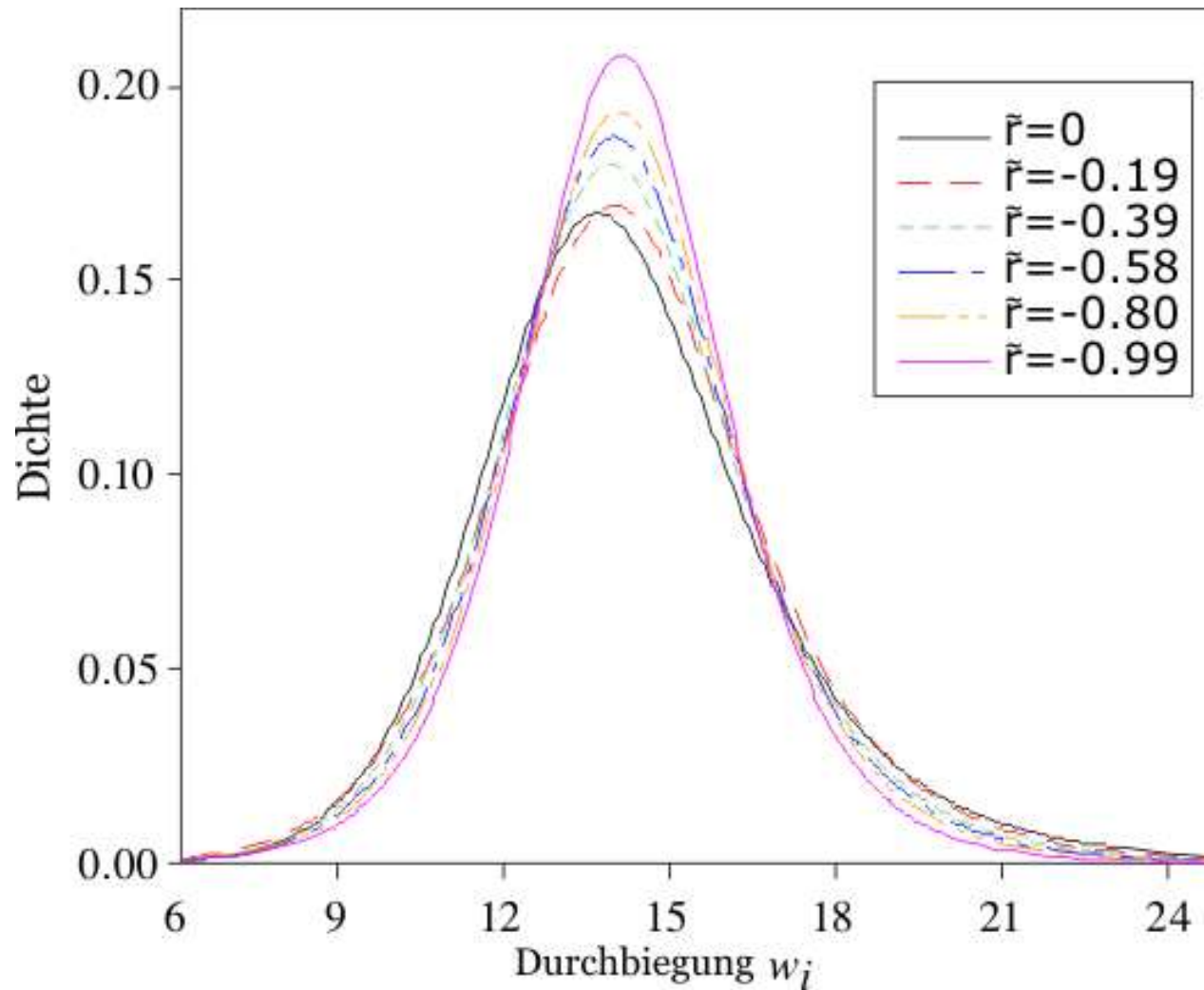
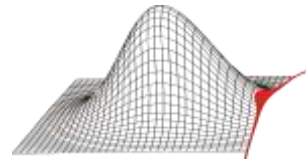
Target-Variable:  $w_j$

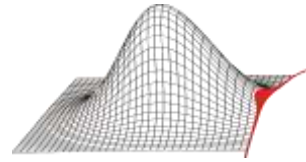
■ Kraft  
■ Höhe  
■ E-Modul  
■ Breite



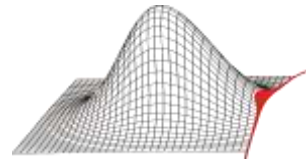
Target-Variable:  $w_j$







- Einleitung
- Theoretische Grundlagen der Statistik
- Probabilistische Methoden
- Mögliche Ergebnisse von probabilistischen Untersuchungen
- Mögliche Fehlerquellen bei probabilistischen Untersuchungen
- **Zusammenfassung**



## Probleme

## Vorteile

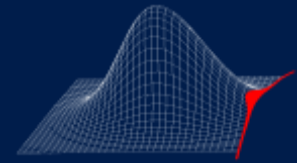
### bei der Anwendung der probabilistischen Methoden

- ausreichende Datenbasis für stochastische Variablen
- höherer Ingenieuraufwand parametrische Modelle bezüglich der stochastischen Variablen, Interpretation der Ergebnisse
- hoher Berechnungsaufwand durch mehrfache Strukturanalysen

- Versagenswahrscheinlichkeit keine akkumulierten konservativen Annahmen
- Robustheit des Designs
- Sensitivität bezüglich der stochastischen Variablen
- Kostengünstigeres Design größere Toleranzen wenn möglich, kleinere Toleranzen wenn nötig



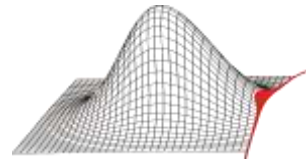
TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DRESDEN



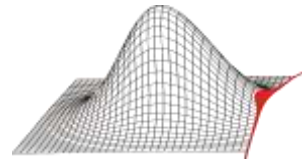
Fakultät Maschinenwesen · Institut für Strömungsmechanik · Professur für Turbomaschinen und Strahlantriebe

# Grundlagen der Probabilistik

**Matthias Voigt**

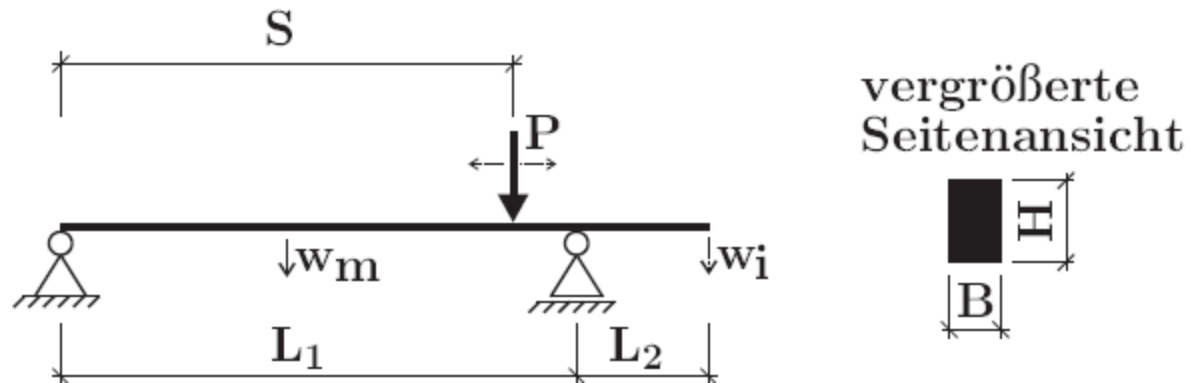
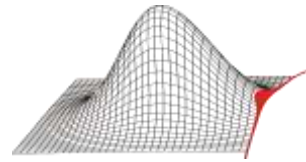


- [1] SACHS, L.: *Angewandte Statistik, Anwendung statistischer Methoden.* Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 2004.
- [2] KECECIOGLU, D.: *Reliability and Life Testing Handbook.* Prentice Hall PTR, New Jersey, 1993.
- [3] FISHER, R. A.: *Statistical Methods for Research Workers.* Oliver & Boyd, Edinburgh, 1970.
- [4] MONTGOMERY, D. C.: *Design and Analysis of Experiments.* John Wiley & Son, Inc, New York, 2001.
- [5] MYERS, R. H.; MONTGOMERY, D. C.: *Response Surface Methodology.* John Wiley & Son, Inc, New York, 1995.
- [6] NETER, J.; KUTNER, M. H.; NACHTSHEIM, C. J.; WASSERMANN, W.: *Applied Linear Statistical Models.* WCB McGraw-Hill, New York, 1996.
- [7] BOX, G. E. P.; BEHNKEN, D. W. : *Some New Three-Level Designs for the Study of Quantitative Variables.* Technometrics, University of Princeton:455–475, 1960.
- [8] MEE, R. W.: *New Box-Behnken Designs.* TN 37996-0532, Department of Statistics, University of Tennessee, Knoxville, 2001.
- [9] WILL, J.; BUCHER, C.: *Statistische Maße für rechnerische Robustheitsbewertungen CAE gestützter Berechnungsmodelle.* Weimarer Optimierungs- und Stochastiktag 3.0, 2006.
- [10] ANDERSON, T. W.; DARLING, D. A.: *Asymptotic Theory of Certain "Goodness of Fit" Criteria Based on Stochastic Processes.* Annals of Mathematical Statistics 23, Seiten 193–212, 1952.

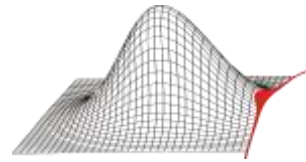


- [11] STEPHENS, M. A.: *EDF Statistics for Goodness of Fit and Some Comparisons*. Journal of the American Statistical Association, Vol. 69, Seiten 730–737, 1974.
- [12] WILL, J.; ROOS, D.; RIEDEL, J.; BUCHER, C.: *Robustheitsbewertung in der stochastischen Strukturmechanik*. NAFEMS Seminar: Use of Stochastics in FEM Analyses, 2003.
- [13] MCKAY, M. D.; CONOVER, W. J.; AND BECKMAN, R. J.: *A Comparison of Three Methods for Selecting Values of Input Variables in the Analysis of Output from a Computer Code*. Technometrics, 21:239–245, 1979.
- [14] SALIBY, E.: *Descriptive Sampling: An Improvement Over Latin Hypercube Sampling*. Proceedings of the Winter Simulation Conference, 1997.
- [15] BUCHER, C.: *Computational Analysis of Randomness in Structural Mechanics*. CRC Press/Balkema, Netherlands, 2009.
- [16] VOIGT, M.: *Probabilistische Simulation des strukturmechanischen Verhaltens von Turbinenschaufeln*. Dissertation, TU Dresden, TUDpress, Verlag der Wissenschaft GmbH, 2009.





Name	Verteilungsart	Verteilung
Höhe des Trägers (H)	gleich	$[95, 105][mm]$
Breite des Trägers (B)	gleich	$[45, 55][mm]$
E-Modul (E)	normal	$\mu = 210000N/mm^2, \sigma = 10000N/mm^2$
Punktlast (P)	normal	$\mu = 2500N, \sigma = 300N$
Position der Punktlast (S)	gleich	$[0, L_1 + L_2]$



Verformungen:

infolge Eigengewicht  $q$  :

$$w_m = \left( \frac{L_1^2}{2,4} - L_2^2 \right) \frac{qL_1^2}{32EI}$$

$$w_i = \left( \frac{L_2^3}{8} + \frac{L_2^2 L_1}{6} - \frac{L_1^3}{24} \right) \frac{qL_2}{EI}$$

infolge  $P \left( S \leq \frac{L_1}{2} \right)$  :

$$w_m = \left( \frac{L_1^2}{16} - \frac{S^2}{12} \right) \frac{PS}{EI}$$

$$w_i = -(L_1 + S) \frac{PSL_2(L_1 - S)}{6L_1EI}$$

infolge  $P \left( S > \frac{L_1}{2} < L_1 \right)$  :

$$w_m = \left( \frac{L_1^2}{16} - \frac{(L_1 - S)^2}{12} \right) \frac{P(L_1 - S)}{EI}$$

$$w_i = -(L_1 + S) \frac{PSL_2(L_1 - S)}{6L_1EI}$$

infolge  $P (S > L_1)$  :

$$w_m = \frac{PL_1^2(S - L_1)}{16EI}$$

$$w_i = \left( \frac{L_1 L_2}{3} + \frac{(S - L_1)L_2}{2} - \frac{(S - L_1)^2}{6} \right) \frac{P(S - L_1)}{EI}$$