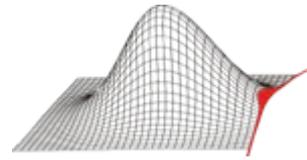
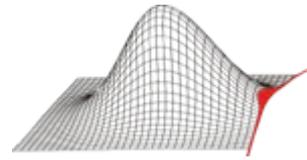


Grundlagen der Probabilistik

Matthias Voigt



- Einleitung
- Theoretische Grundlagen der Stochastik
- Probabilistische Methoden
- Mögliche Ergebnisse von probabilistischen Untersuchungen
- Mögliche Fehlerquellen bei probabilistischen Untersuchungen
- Zusammenfassung



Stochastik

Lehre der Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit



Kombinatorik

Wie viele Möglichkeiten gibt es, Elemente anzuordnen oder aus einer Menge von Elementen zu ziehen?



Probabilistik

Definition von Modellen zur Beschreibung von zufälligen Ereignissen

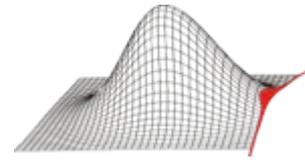


Vorhersagen dieser Ereignisse



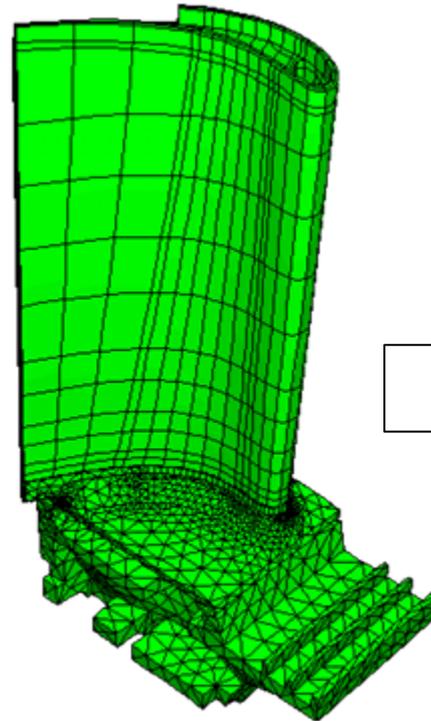
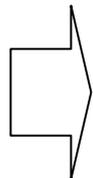
Statistik

Ableiten von Gesetzmäßigkeiten und Strukturen aus Ereignissen



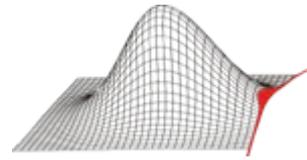
Eingangsgrößen:

Geometrie
Belastung
Materialeigenschaften

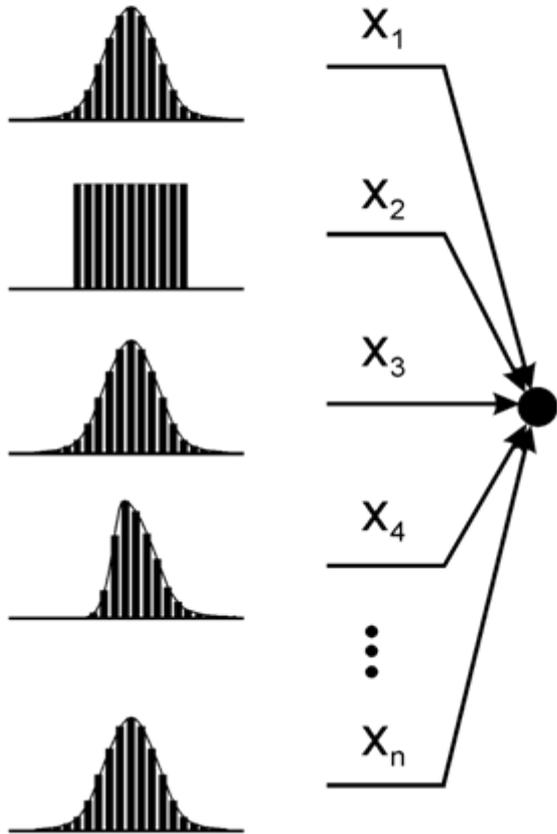


Ergebnisse:

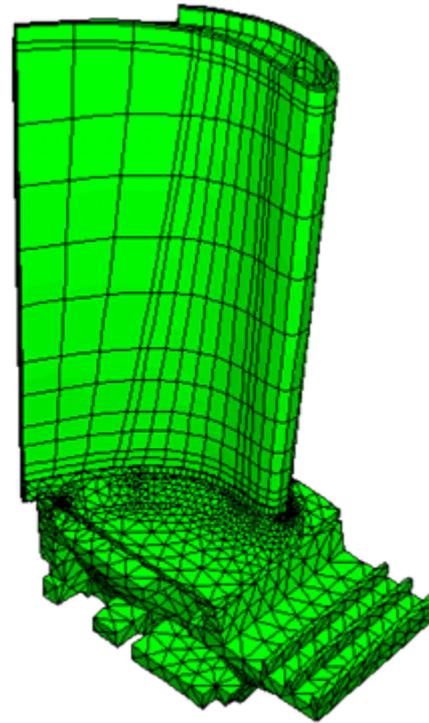
Temperatur
Spannungen
Lebensdauer



probabilistische Eingangsgrößen

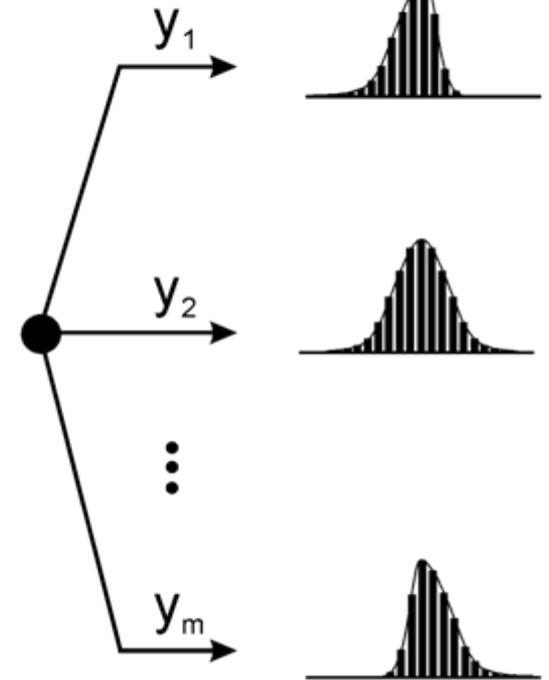


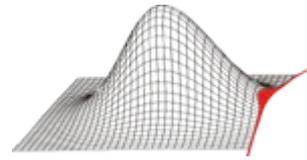
Strukturanalyse



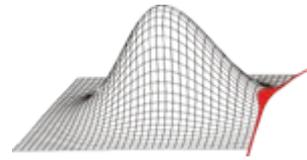
deterministisches
Modell

Streuung der Ergebnisgrößen





- Einleitung
- **Theoretische Grundlagen der Stochastik**
- Probabilistische Methoden
- Mögliche Ergebnisse von probabilistischen Untersuchungen
- Mögliche Fehlerquellen bei probabilistischen Untersuchungen
- Zusammenfassung



Zufallsexperiment



diskret

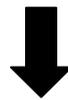
Zufallsvariable

stetig



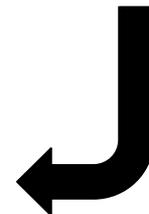
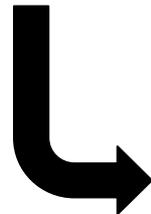
Wahrscheinlichkeitsfunktion

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

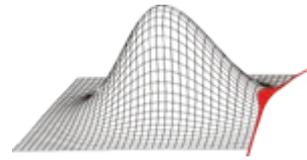


$$F(b) = \sum_{b_{ri} \leq b} f(b_{ri})$$

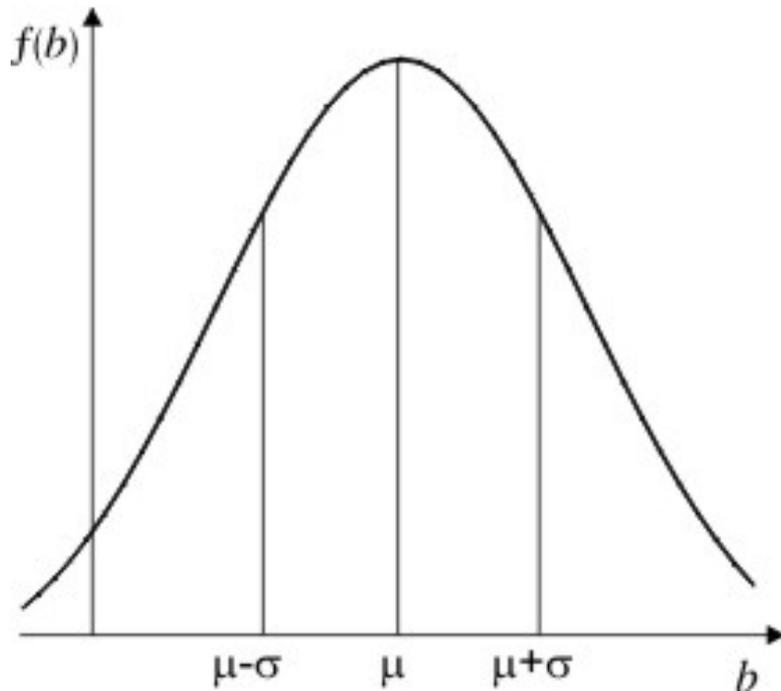
$$F(b) = \int_{-\infty}^b f(\tilde{b}) d\tilde{b}$$



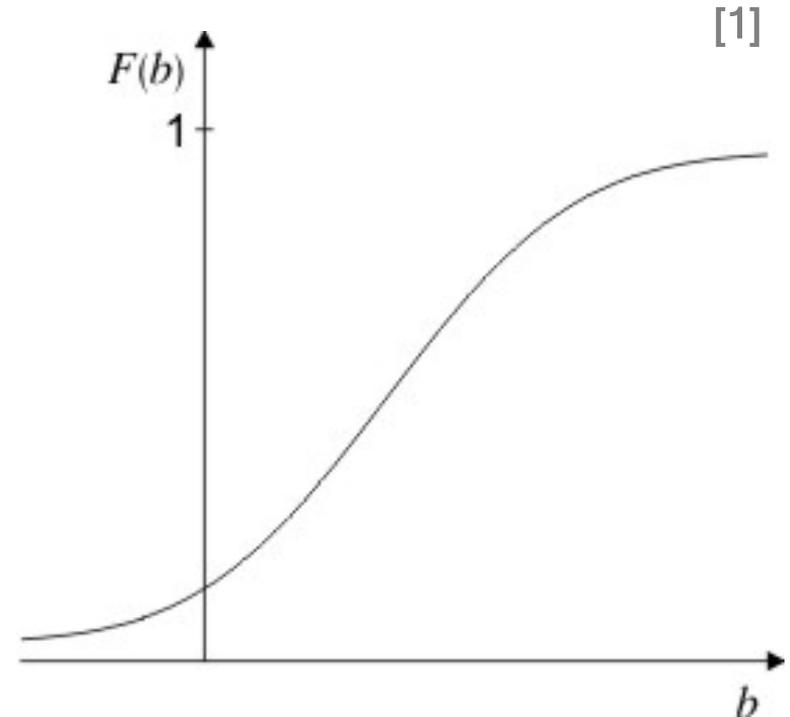
$$F(b) = P(\mathbf{b} \leq b)$$



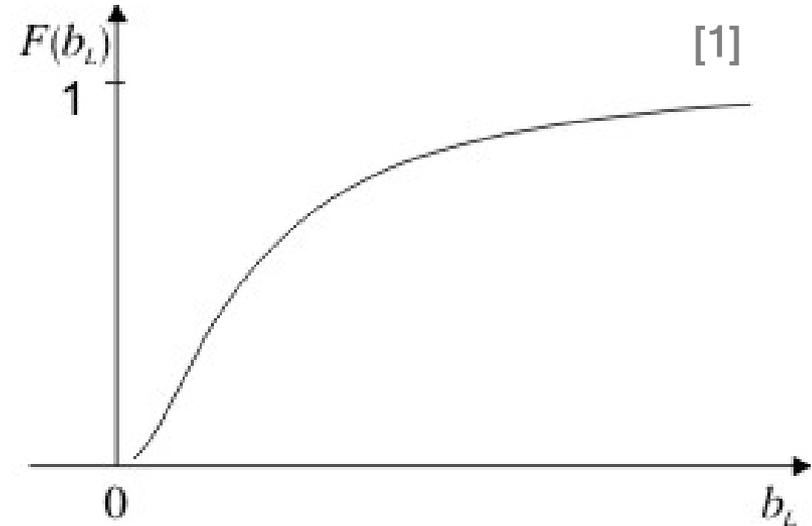
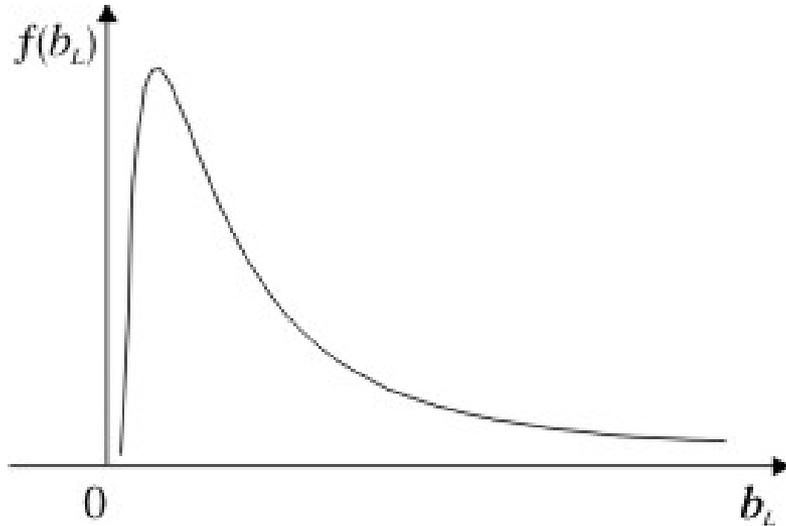
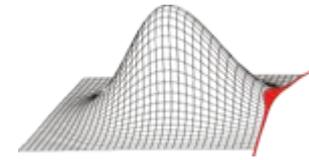
- auch Normalverteilung genannt



$$f(b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(b - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

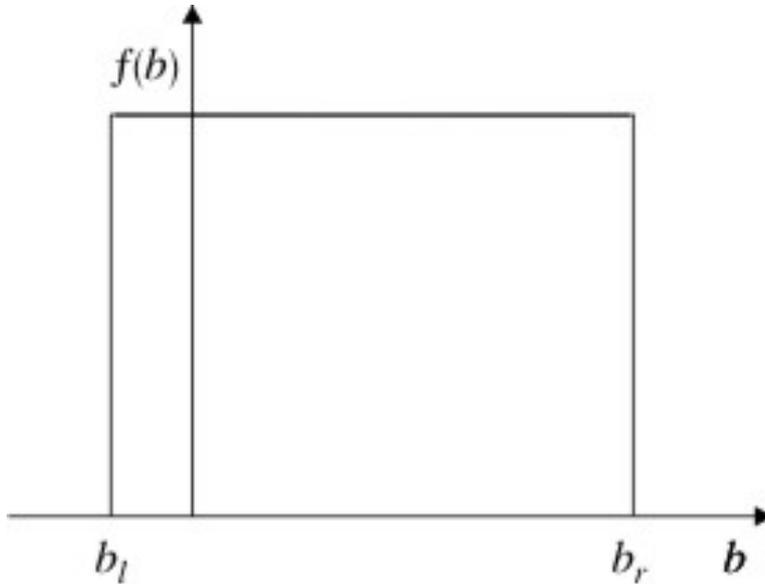
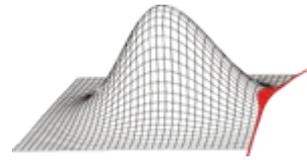


$$F(b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^b \exp\left\{-\frac{(\tilde{b} - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} d\tilde{b}$$

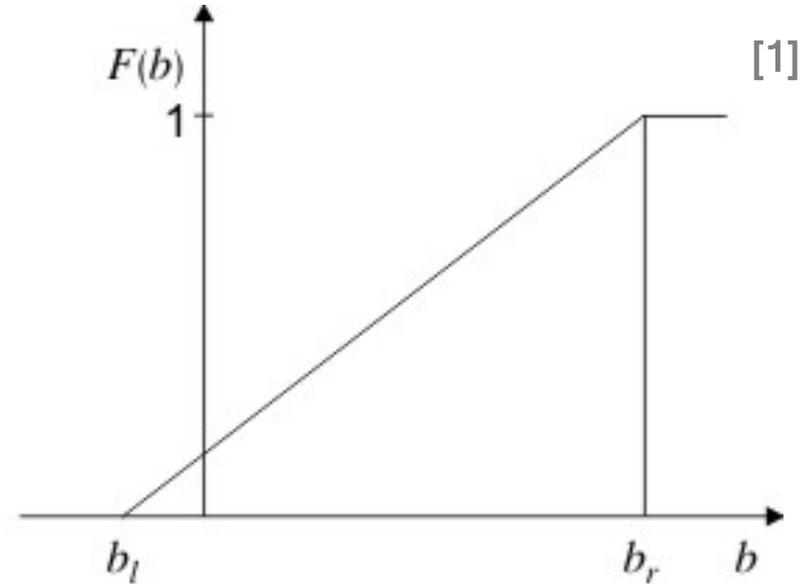


$$f(b_L) = \begin{cases} \frac{1}{\zeta \sqrt{2\pi} b_L} \exp \left\{ -\frac{(\ln b_L - \lambda)^2}{2\zeta^2} \right\} & \text{für } b_L > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

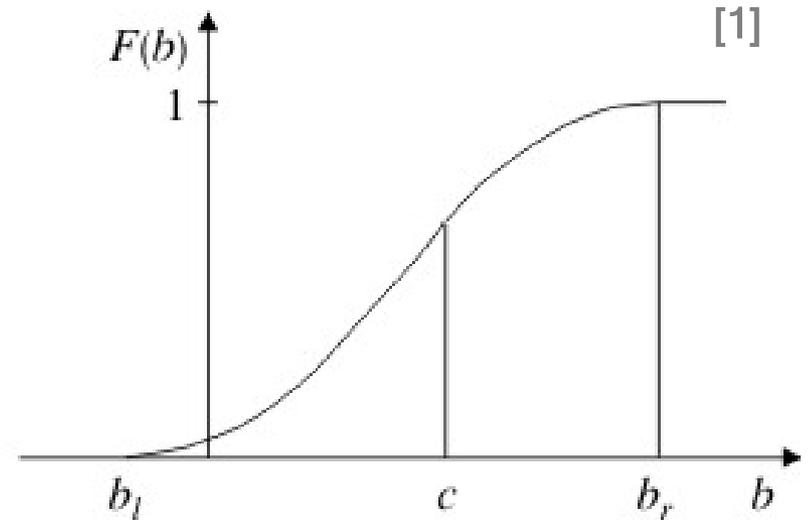
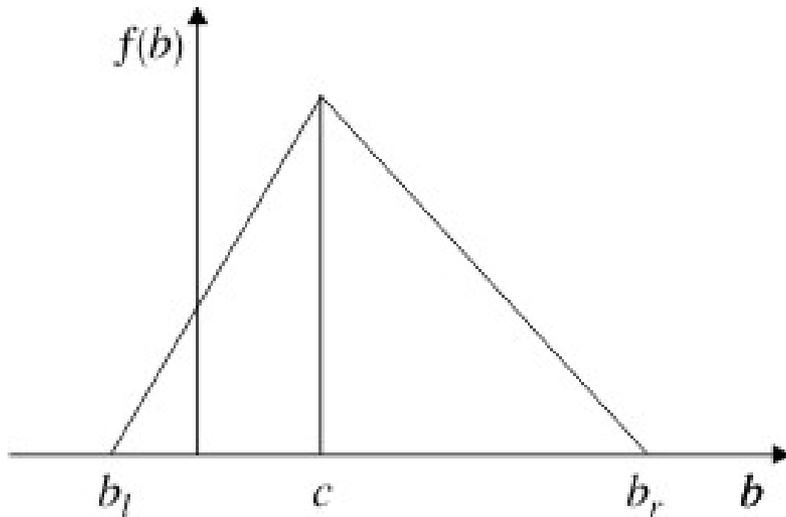
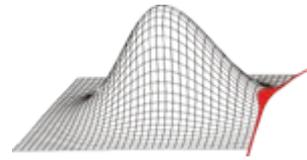
$$F(b_L) = \begin{cases} \frac{1}{\zeta \sqrt{2\pi}} \int_0^{b_L} \frac{1}{\tilde{b}_L} \exp \left\{ -\frac{(\ln \tilde{b}_L - \lambda)^2}{2\zeta^2} \right\} d\tilde{b}_L & \text{für } \tilde{b}_L > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad [1]$$



$$f(b) = \begin{cases} \frac{1}{b_r - b_l} & b_l \leq b \leq b_r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

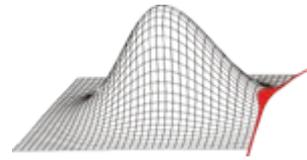


$$F(b) = \begin{cases} 0 & b < b_l \\ \frac{b - b_l}{b_r - b_l} & b_l \leq b \leq b_r \\ 1 & b > b_r \end{cases} \quad [1]$$

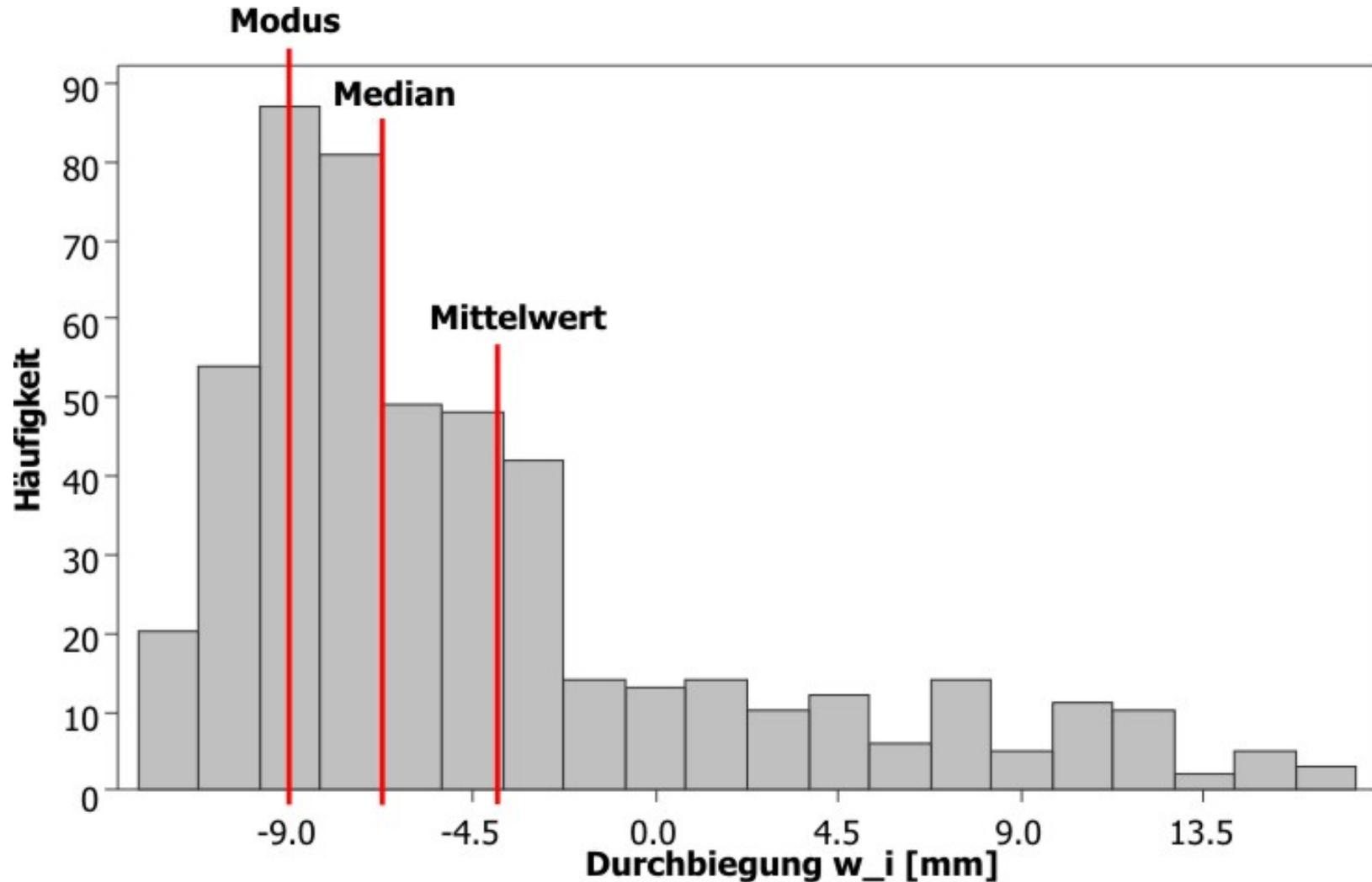
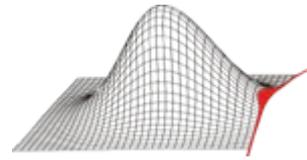


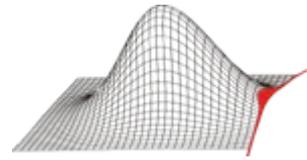
$$f(b) = \begin{cases} f_l(b) = \frac{2(b - b_l)}{(b_r - b_l)(c - b_l)} & b_l \leq b < c \\ f_r(b) = \frac{2(b_r - b)}{(b_r - b_l)(b_r - c)} & c \leq b \leq b_r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$F(b) = \begin{cases} 0 & b < b_l \\ F_l(b) = \frac{b^2 + b_l^2 - 2b_l b}{(b_l - b_r)(b_l - c)} & b_l \leq x < c \\ F_r(b) = \frac{b^2 - 2b_r b + b_r c + b_l(b - c)}{(b_l - b_r)(b_r - c)} & c \leq b \leq b_r \\ 1 & b > b_r \end{cases}$$



- Arithmetischer Mittelwert:
$$\bar{b}_{ri} = \frac{1}{n_{sim}} \sum_{k=1}^{n_{sim}} b_{ri,k} \quad [1]$$
 - Flächenschwerpunkt der Fläche unter der Dichtefunktion
 - Stark abhängig von Ausreißern
- Median oder Zentralwert: *Stichprobenwert, der genau in der Mitte einer geordneten Stichprobe steht.*
 - Robustes Lagemaß
- Modulwert oder Modus: *Ausprägung mit der größten Häufigkeit*
 - Nur eindeutig, wenn die Häufigkeitsverteilung ein eindeutiges Maximum aufweist





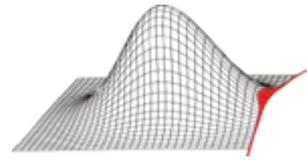
Standardabweichung:

[1]

$$\sigma(\mathbf{b}_{ri}) = \sqrt{Var(\mathbf{b}_{ri})} = \sqrt{\frac{1}{n_{sim} - 1} \sum_{k=1}^{n_{sim}} (b_{ri,k} - \bar{b}_{ri})^2}$$

Variationskoeffizient:

$$\delta(\mathbf{b}_{ri}) = \frac{\sigma(\mathbf{b}_{ri})}{\bar{b}_{ri}}$$



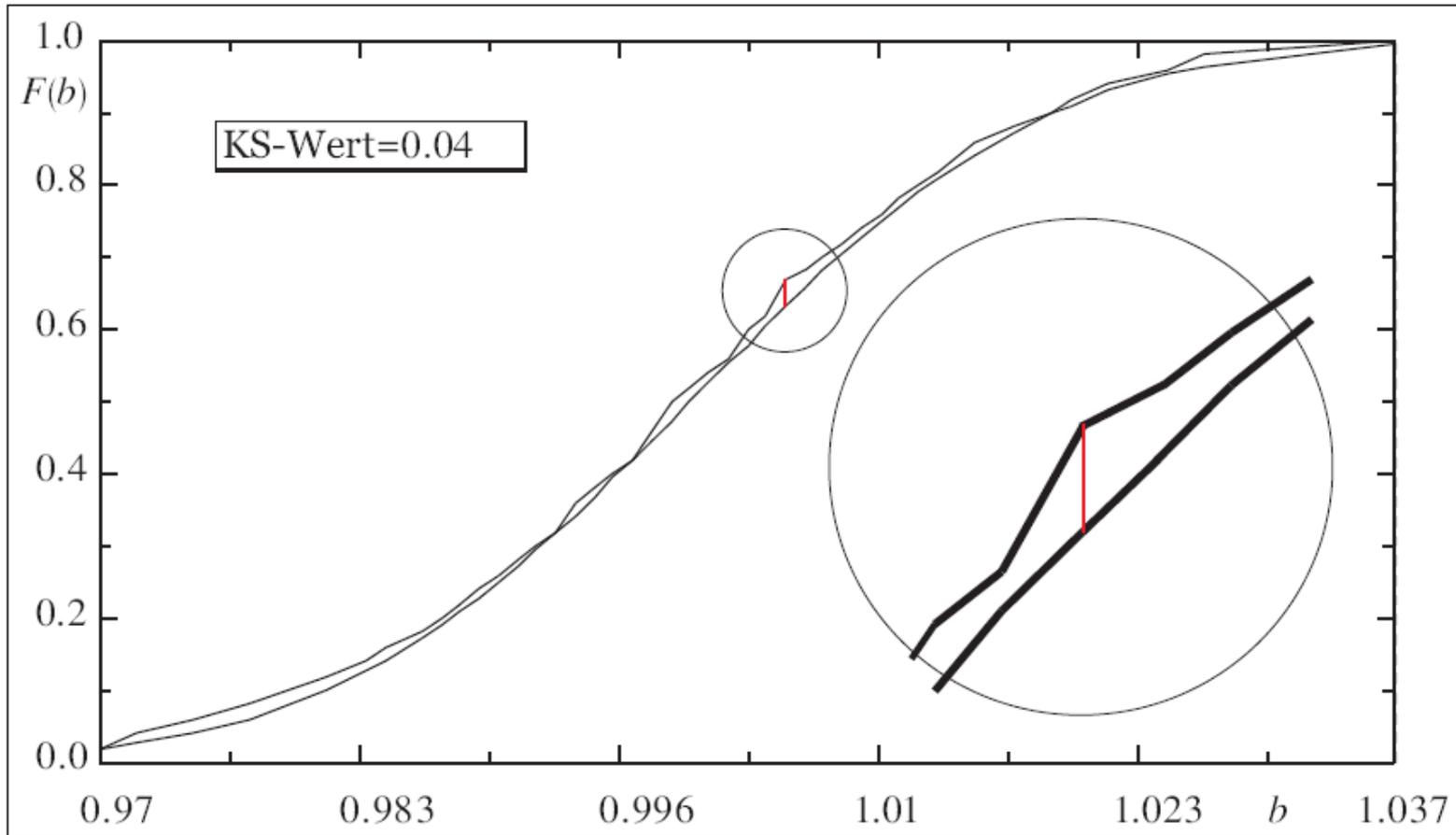
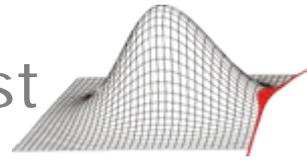
Skewness (Schiefe): *Grad der Asymmetrie einer Verteilung um den Zentralwert*

[1]

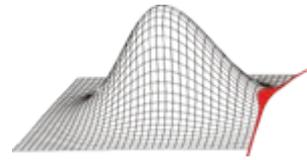
$$S = \frac{\sum_{i=1}^{n_{sim}} (b_{ri} - \bar{b}_{ri})^3}{n_{sim} * \sigma^3}$$

Kurtosis: *Grad der Flachheit/Steilheit einer Verteilung*

$$K = \frac{\sum_{i=1}^{n_{sim}} (b_{ri} - \bar{b}_{ri})^4}{n_{sim} * \sigma^4} - 3$$



$$KS = \max_{-\infty < b_k < \infty} |F_d(b_k) - F_s(b_k)|$$

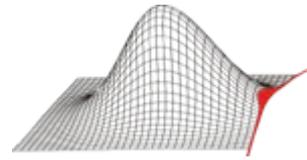


Der Anderson-Darling-Test ist eine Modifikation des [10]
Kolmogorow-Smirnow-Anpassungstests.

Die Abweichungen der Testverteilung von der Zielverteilung werden in den Randbereichen der Verteilungen höher und im Mittelbereich der Verteilung niedriger gewichtet.

$$A^2 = -n_{sim} - \frac{1}{n_{sim}} \sum_k^{n_{sim}} (2k - 1) (\ln F_s(b_k) + \ln(1 - F_s(b_{n_{sim}+1-k})))$$

Kritische Werte für A sind abhängig von der verwendeten Verteilungsfunktion F_s . Tabellierte Werte für A für verschiedene Verteilungsfunktionen sind z.B. in [11] veröffentlicht.



Korrelationskoeffizient nach Pearson

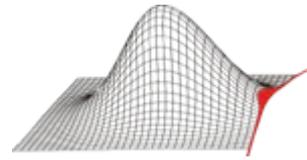
[1]

$$r_{\mathbf{b}_{ri}\mathbf{b}_{rj}} = \frac{Cov(\mathbf{b}_{ri}, \mathbf{b}_{rj})}{\sqrt{Var(\mathbf{b}_{ri})} \sqrt{Var(\mathbf{b}_{rj})}}$$

$$Cov(\mathbf{b}_{ri}, \mathbf{b}_{rj}) = \frac{1}{n_{sim} - 1} \sum_{k=1}^{n_{sim}} (b_{ri,k} - \bar{b}_{ri})(b_{rj,k} - \bar{b}_{rj})$$

Wertebereich: [-1,1]

 $r \approx -1$ oder $1 \rightarrow$ starker linearer Zusammenhang $r \approx 0 \rightarrow$ kein linearer Zusammenhang



Rangkorrelationskoeffizient nach Spearman

[1]

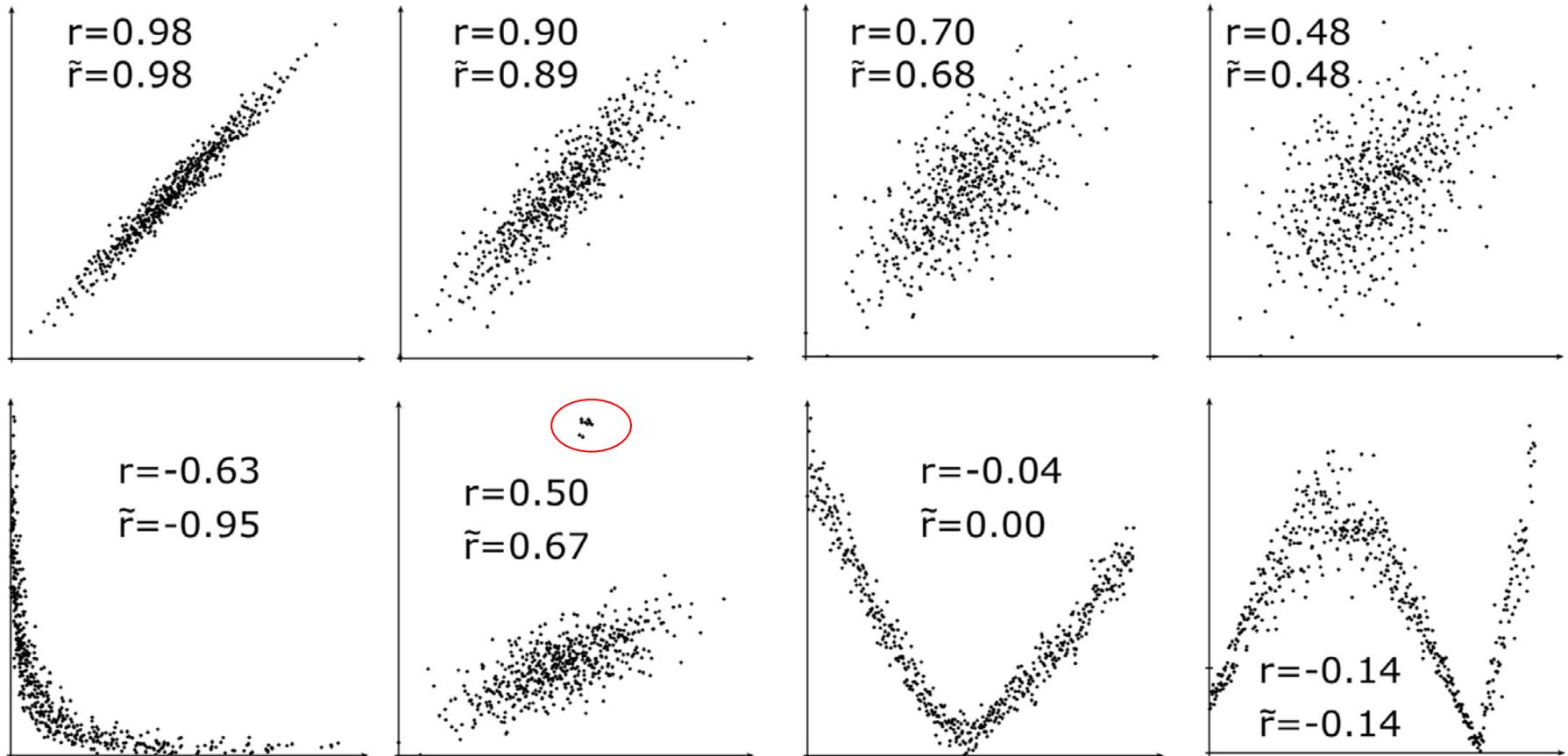
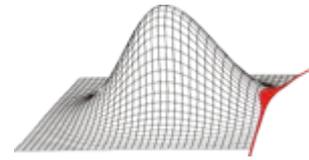
$$\mathbf{b}_{ri} = \begin{bmatrix} b_{ri,1} \\ \vdots \\ b_{ri,n_{sim}} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rang}(\mathbf{b}_{ri}) = \begin{bmatrix} R_{b_{ri,1}} = \text{Rang von } b_{ri,1} \text{ in } \mathbf{b}_{ri} \\ \vdots \\ R_{b_{ri,n_{sim}}} = \text{Rang von } b_{ri,n_{sim}} \text{ in } \mathbf{b}_{ri} \end{bmatrix}$$

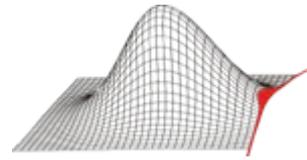
$$\tilde{r}_{\mathbf{b}_{ri}\mathbf{b}_{rj}} = \frac{\sum_{k=1}^{n_{sim}} (R_{b_{ri,k}} - \bar{R}_{b_{ri}})(R_{b_{rj,k}} - \bar{R}_{b_{rj}})}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n_{sim}} (R_{b_{ri,k}} - \bar{R}_{b_{ri}})^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n_{sim}} (R_{b_{rj,k}} - \bar{R}_{b_{rj}})^2}}$$

Wertebereich: $[-1, 1]$

$\tilde{r} \approx -1$ oder $1 \rightarrow$ starker linearer oder monotoner nicht-linearer Zusammenhang

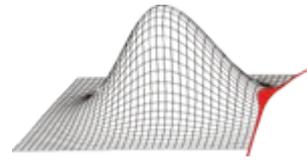
$\tilde{r} \approx 0 \rightarrow$ kein linearer oder monotoner nicht-linearer Zusammenhang



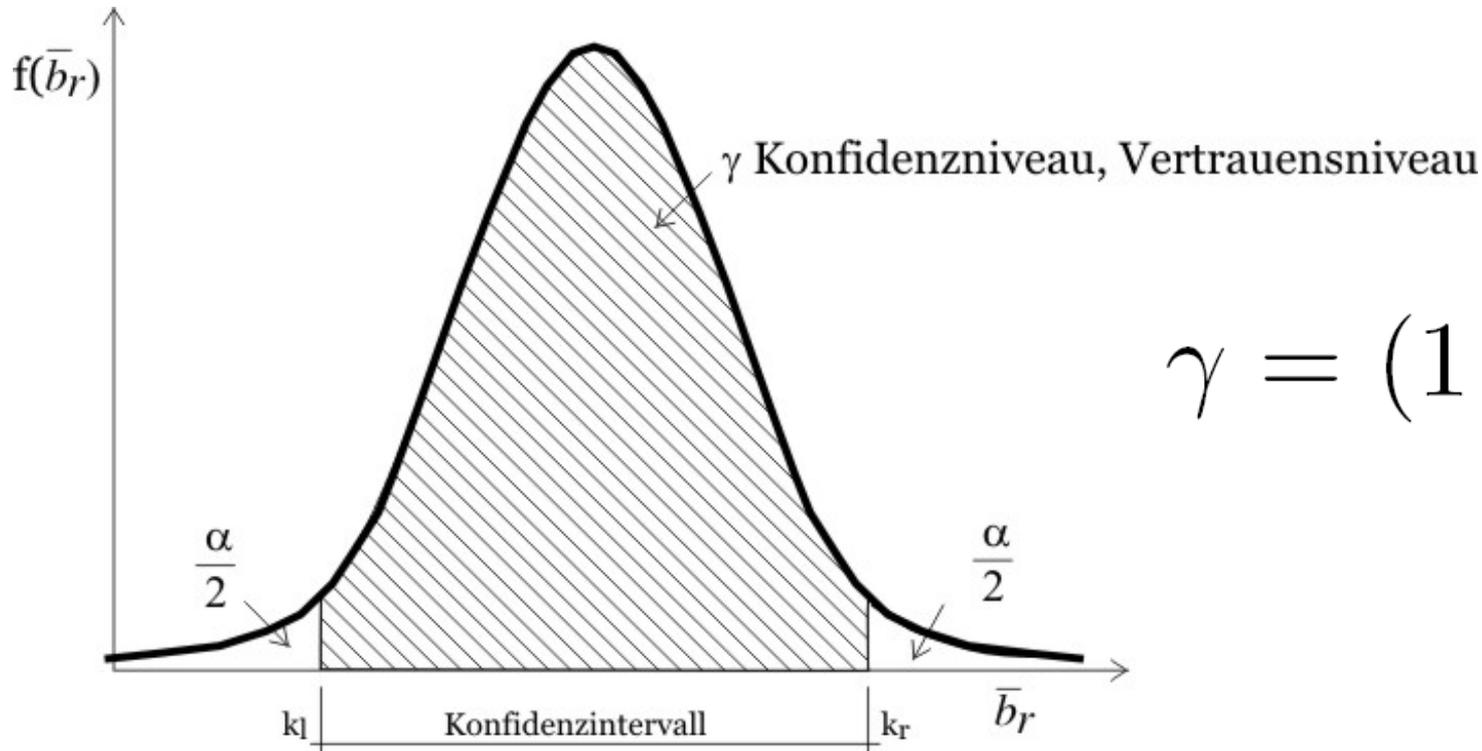


Nichtlineare Zusammenhänge?

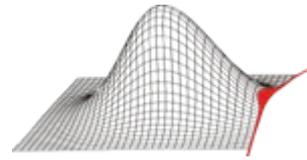
- Quadratischer Korrelationskoeffizient → DYNARDO [9]
- Regression
- Nichtlineares Korrelationsmaß → ProSi
- Ant-Hill-Plot



- Statistische Maße (z.B. Mittelwert, Standardabweichung ...) sind Punktschätzungen → enthalten keine Aussage über die Güte der Schätzung



$$\gamma = (1 - \alpha)$$



Relative Häufigkeit des Ereignisses n_f

$$\hat{p} = \frac{n_f}{n_{sim}}; \quad \hat{p} \rightarrow p \quad \text{sobald } n_{sim} \rightarrow \infty$$

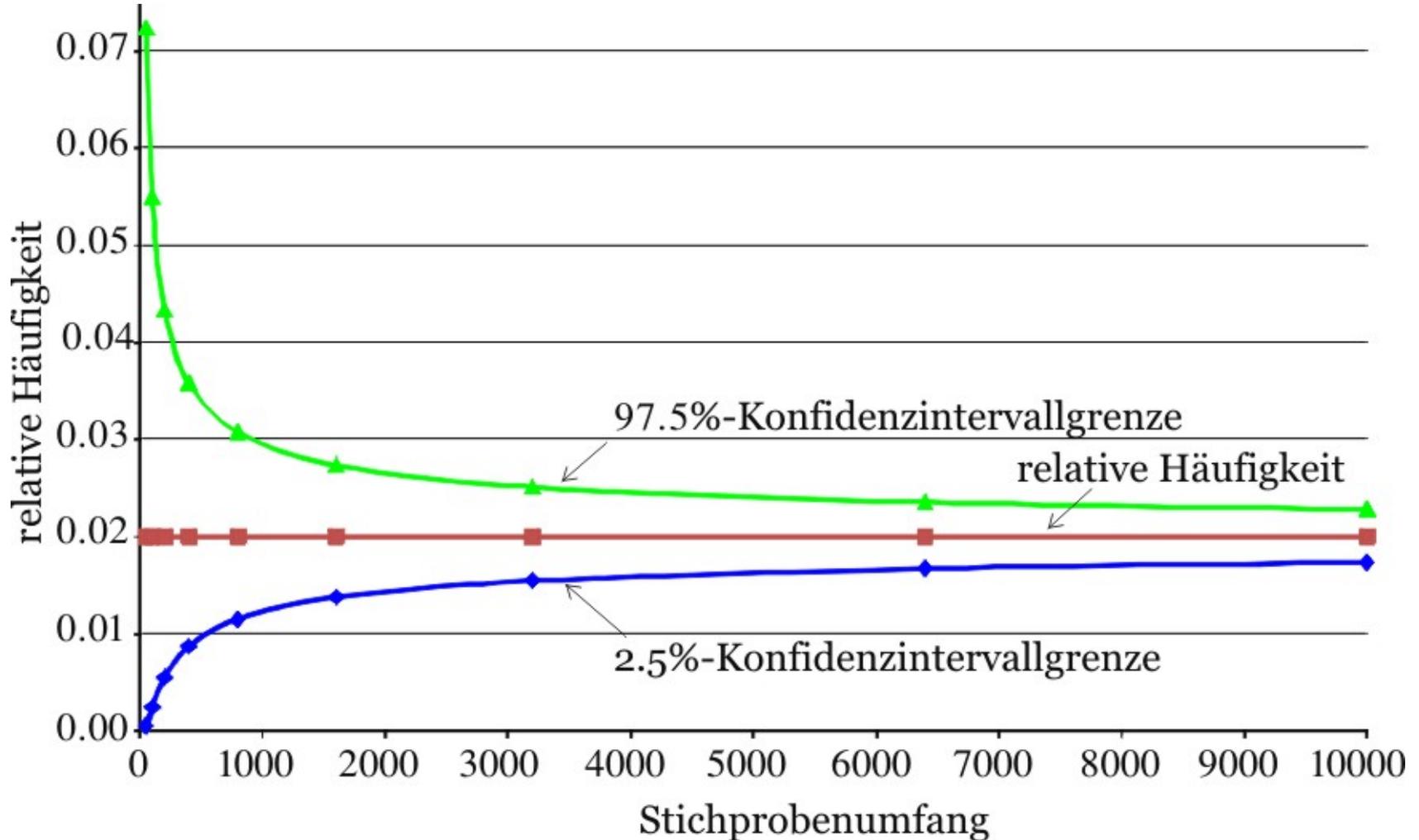
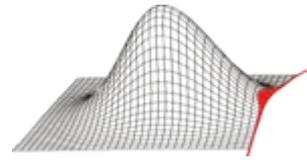
[2]

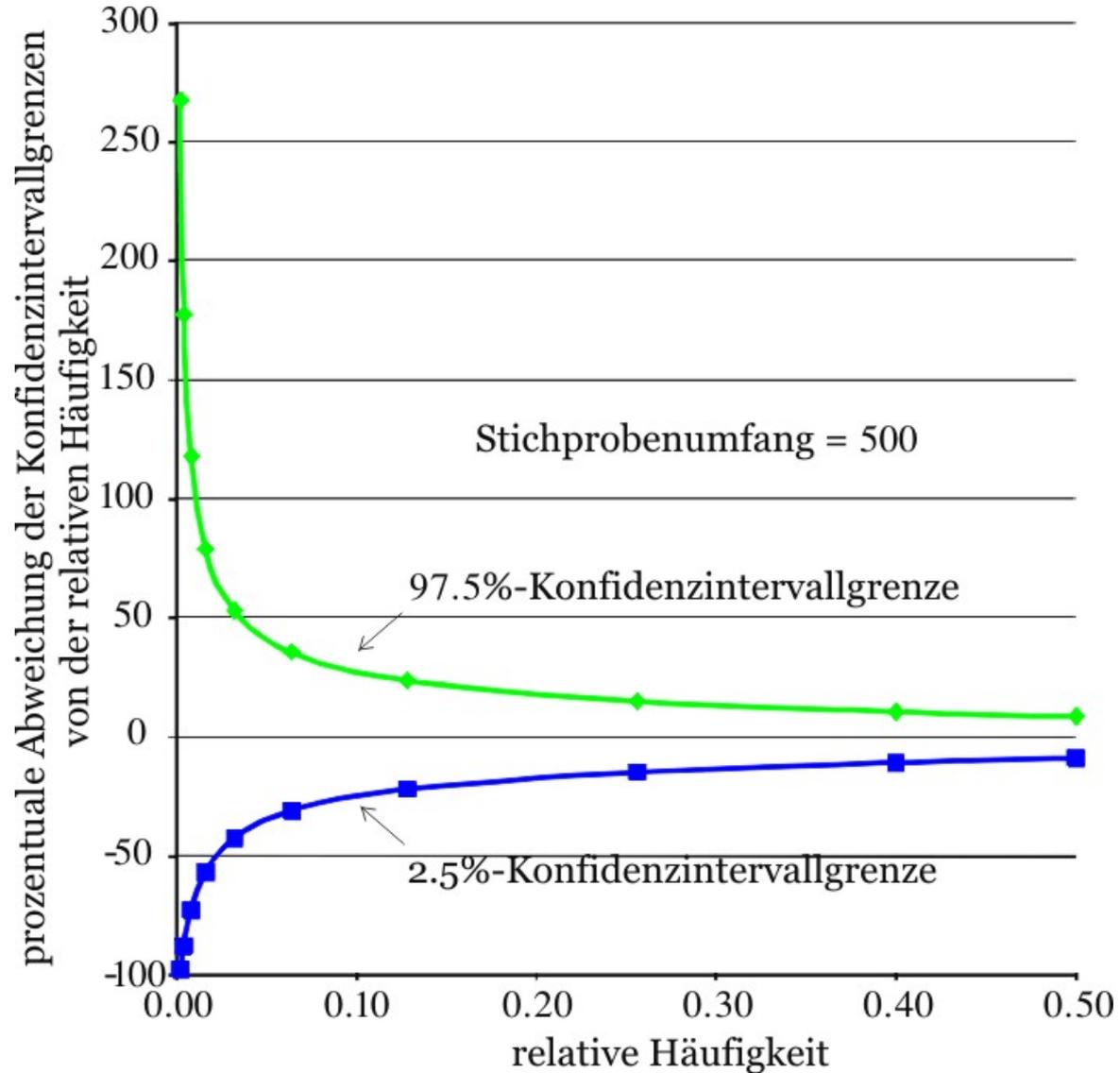
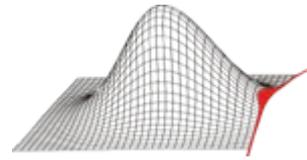
Linke Grenze:

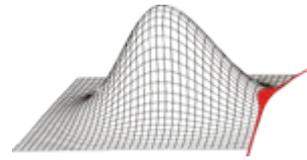
$$\frac{1}{1 + \frac{n_{sim} - n_f + 1}{n_f} F_{1 - \frac{\alpha}{2}, 2(n_{sim} - n_f + 1), 2n_f}}$$

Rechte Grenze:

$$\frac{1}{1 + \frac{n_{sim} - n_f + 1}{n_f} F_{\frac{\alpha}{2}, 2(n_{sim} - n_f + 1), 2n_f}}$$







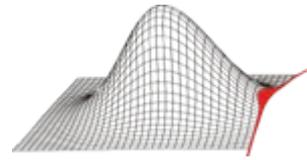
Weicht der Korrelationskoeffizient statistisch signifikant von Null ab, unterscheidet sich seine Verteilung von der Normalverteilung [1].

$$\dot{z} = \operatorname{arctanh} r \quad [3]$$

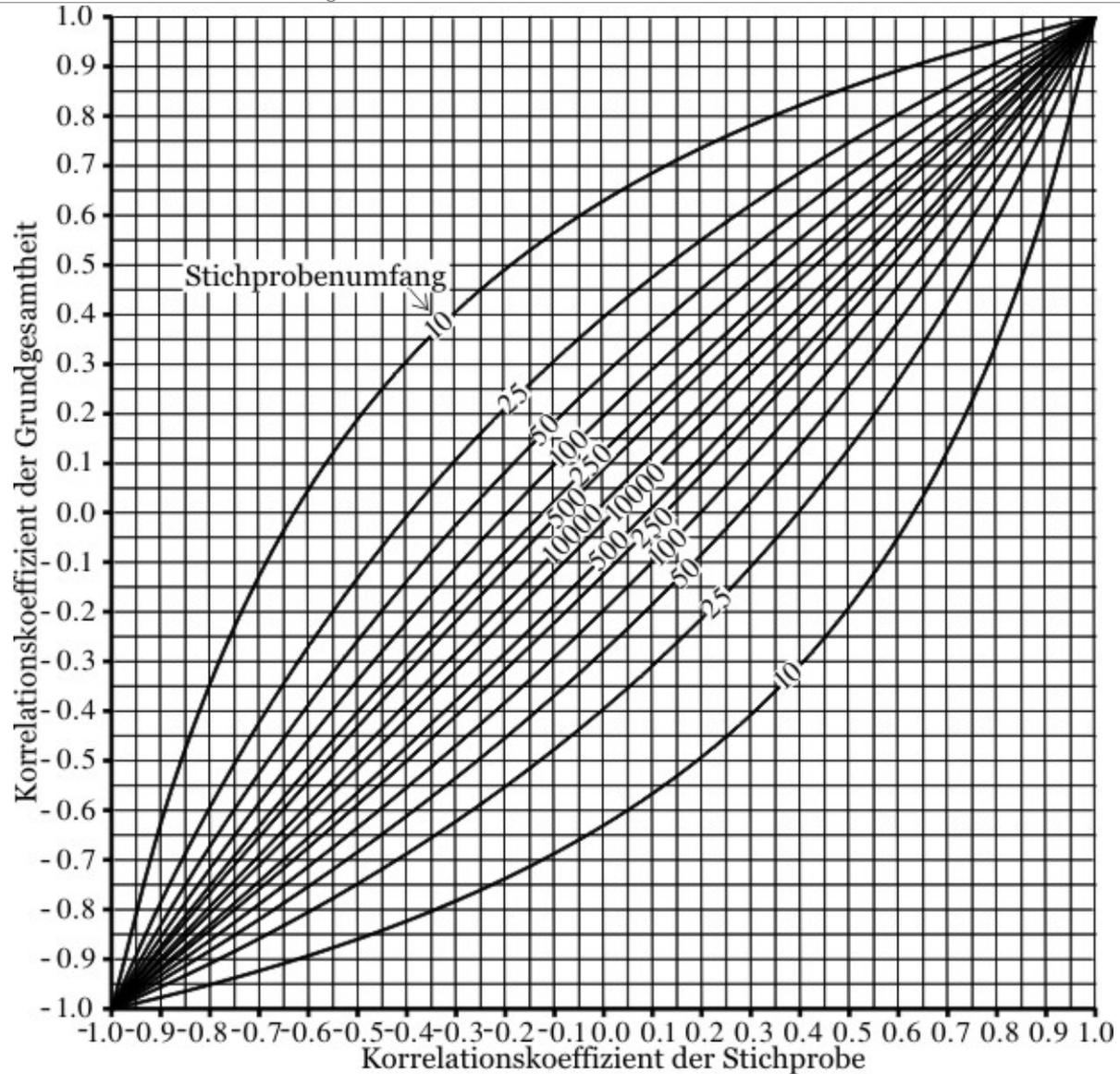
$$\dot{k}_l = \dot{z} - \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n_{sim} - 3}}, \dot{k}_r = \dot{z} + \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n_{sim} - 3}}$$

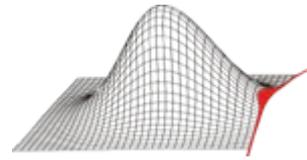
$$k_l = \tanh \dot{k}_l$$

$$k_r = \tanh \dot{k}_r$$

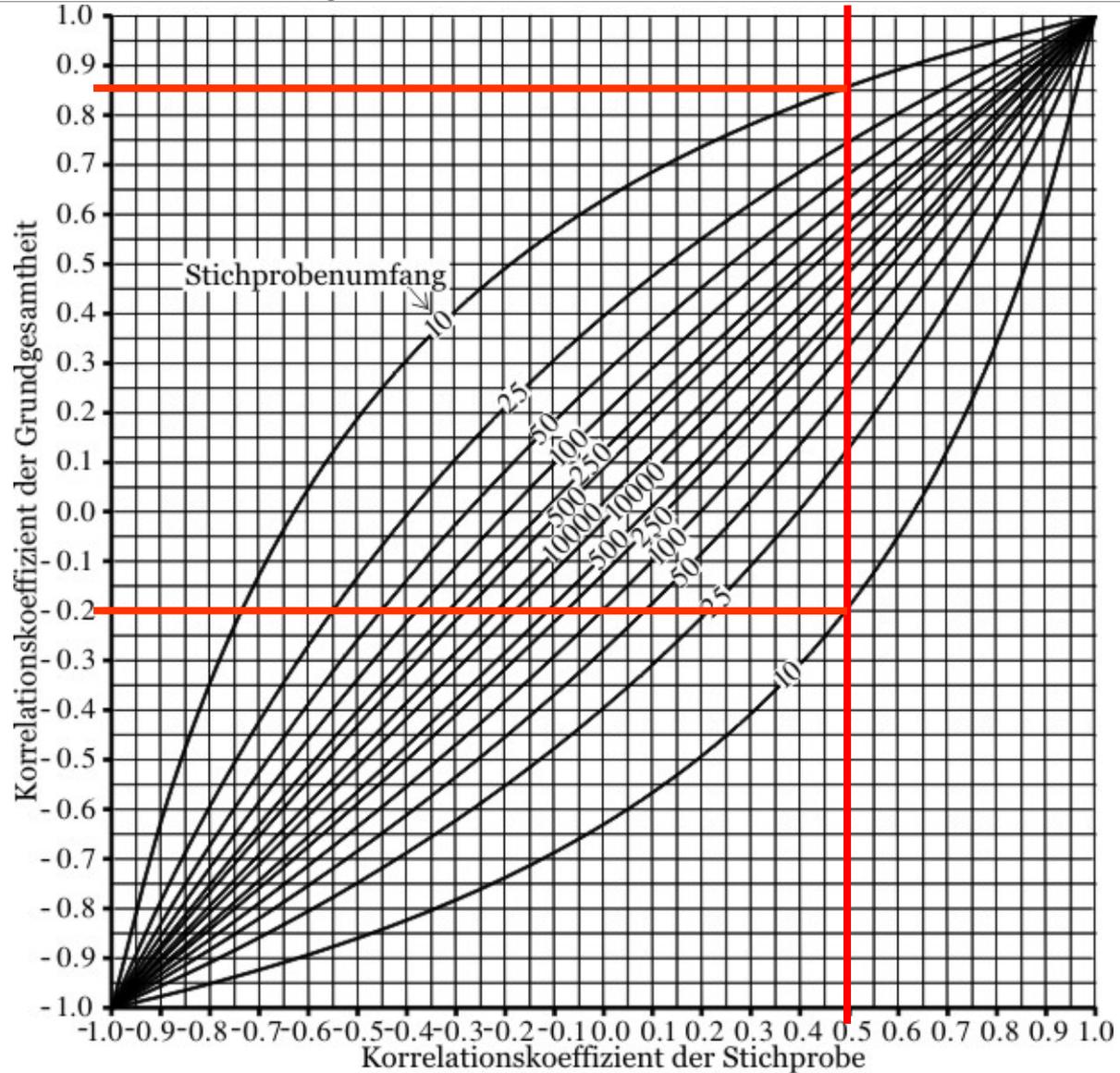


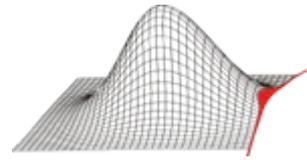
$(\alpha=0.05)$





$(\alpha=0.05)$





Problem: Meist werden Systeme untersucht, in denen mehrere Zufallsvariablen Einfluss auf eine Ergebnisgröße haben.

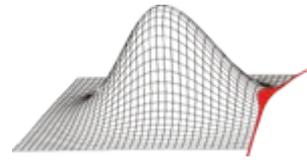
Die Anzahl der Zufallsvariablen hat Einfluss auf die Irrtumswahrscheinlichkeit der Konfidenzintervalle.

Lösung:

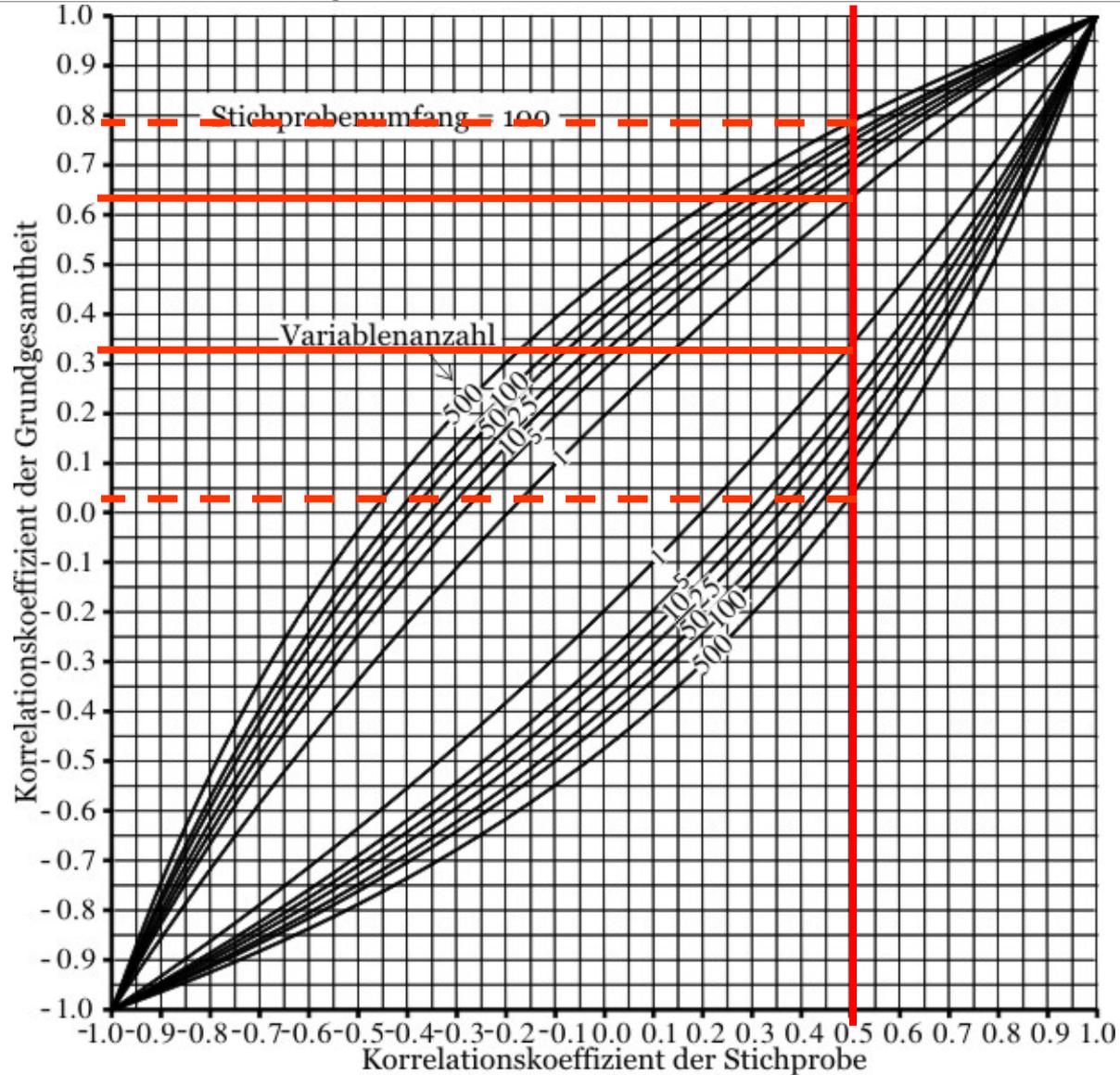
Anpassung der tolerierbaren Irrtumswahrscheinlichkeit mithilfe der Bonferroni-Methode oder Bonferroni-Korrektur:

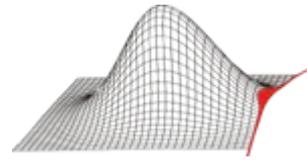
$$\alpha' = \frac{\alpha}{n_b}$$

Die Bonferroni-Methode ist eine grobe Näherung und sehr konservativ.

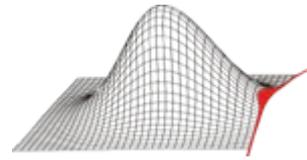


$(\alpha=0.05)$

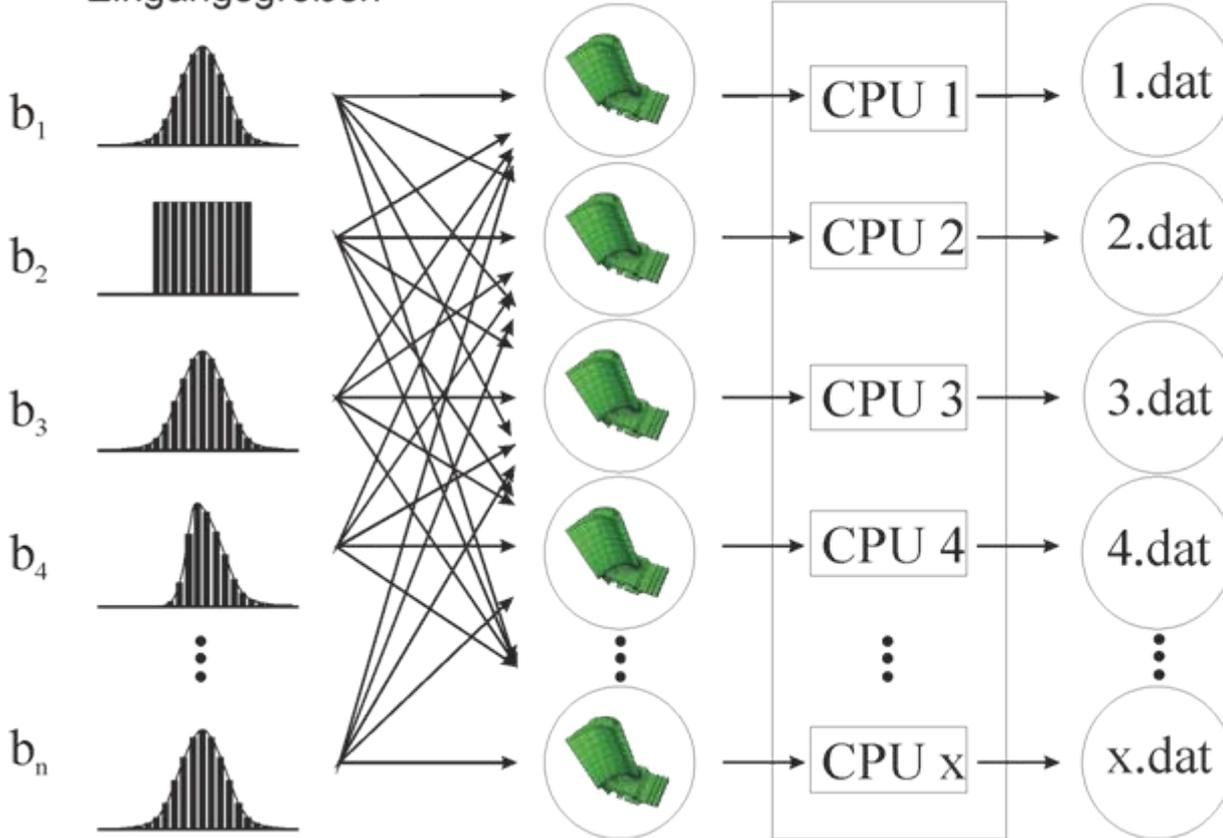




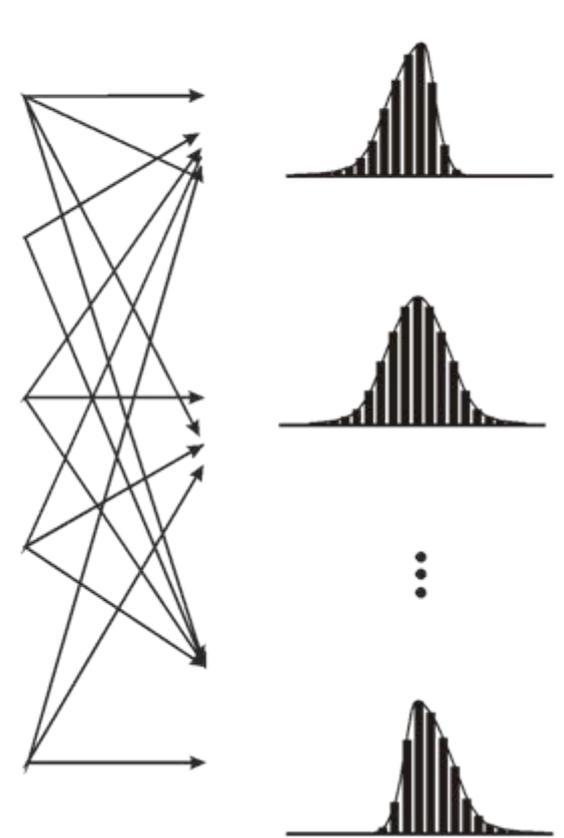
- Einleitung
- Theoretische Grundlagen der Stochastik
- **Probabilistische Methoden**
- Mögliche Ergebnisse von probabilistischen Untersuchungen
- Mögliche Fehlerquellen bei probabilistischen Untersuchungen
- Zusammenfassung

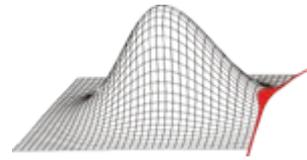


probabilistische
Eingangsgrößen

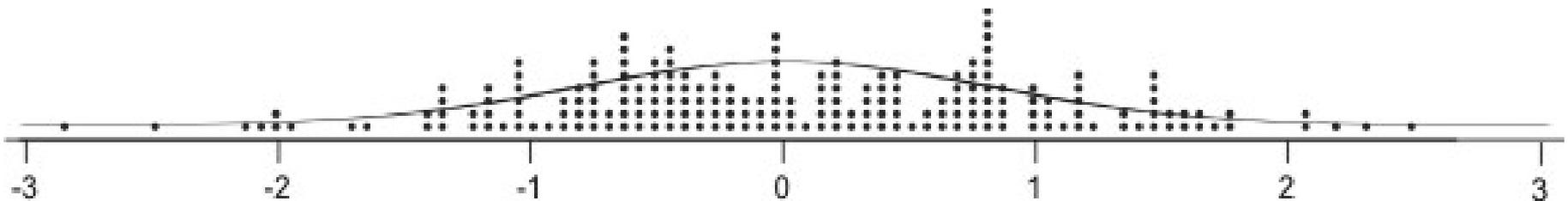


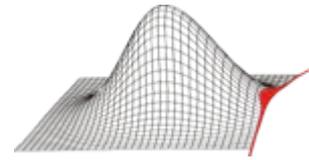
unsicheres Systemverhalten
mit y Ergebnisgrößen





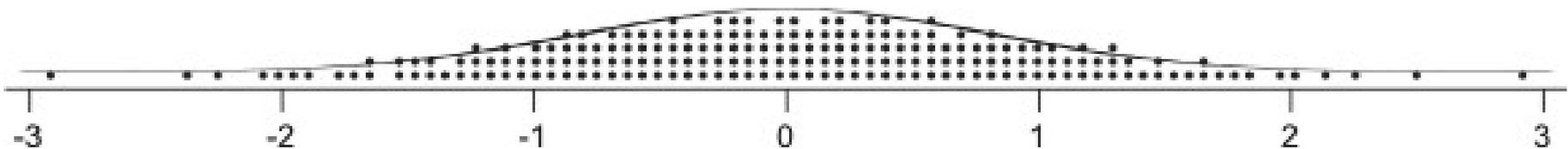
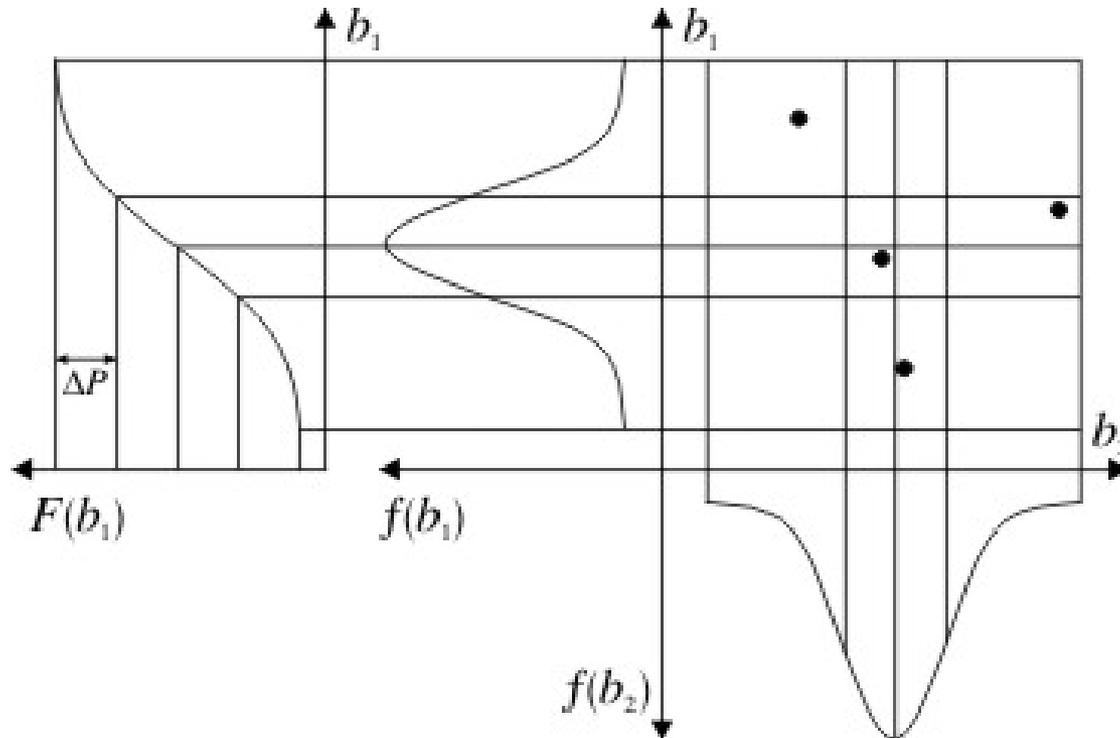
- Simple-Random-Sampling (SRS)
 - Realisierungen werden „zufällig“ ermittelt
 - „Transformation“ der durch die Zufallsgeneratoren ermittelten Gleichverteilungen in andere Verteilungen erfolgt z.B. mittels Inversionsmethode oder Annahme- Ablehnungsmethode
 - „Cluster“-Bildungen der Realisierungen ist möglich

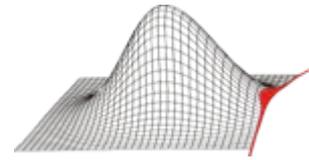




- Latin-Hypercube-Sampling (LHS)

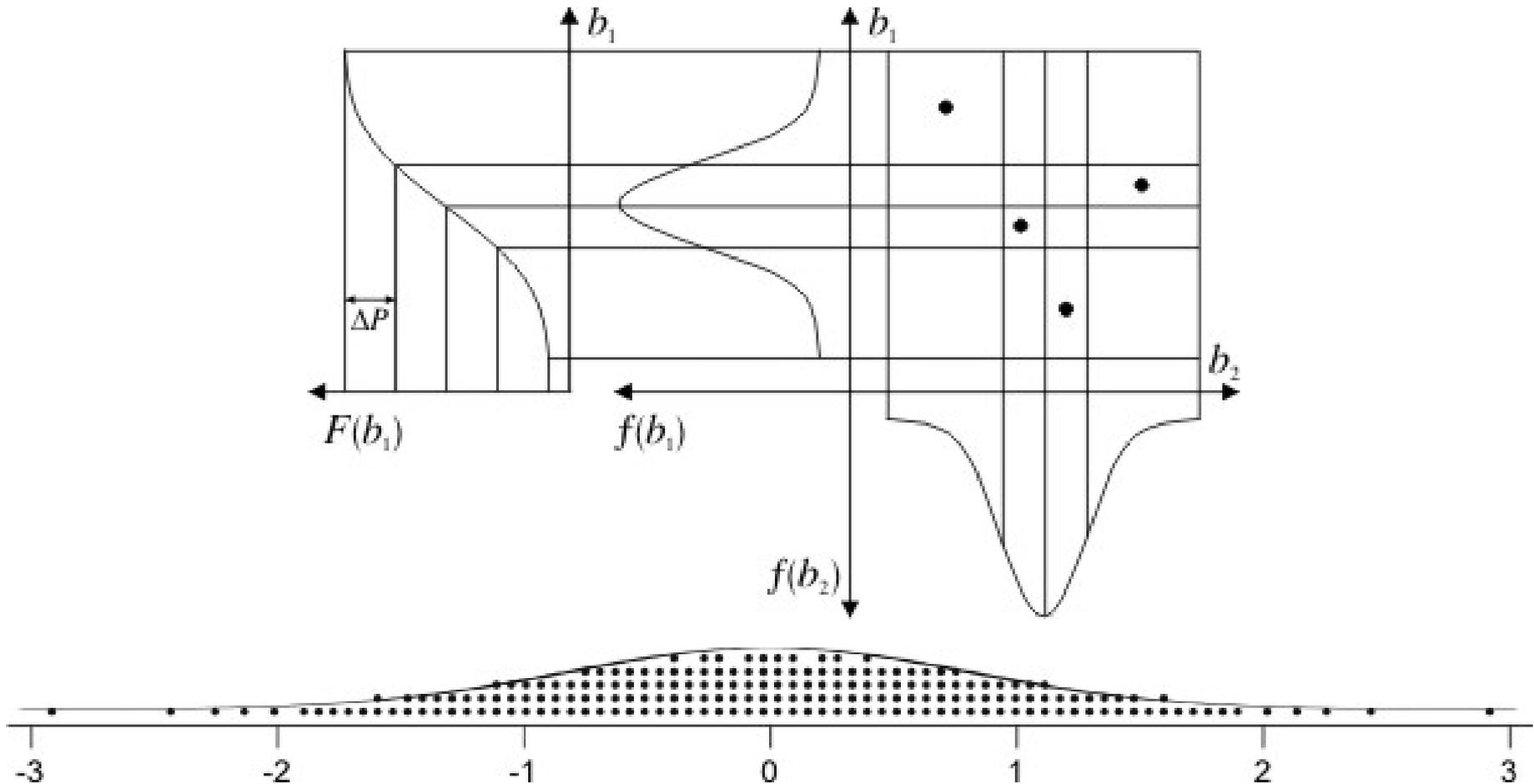
[13]

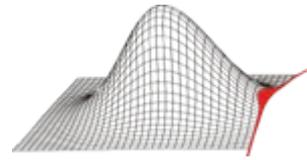




- Descriptive-Sampling (DS)

[14]





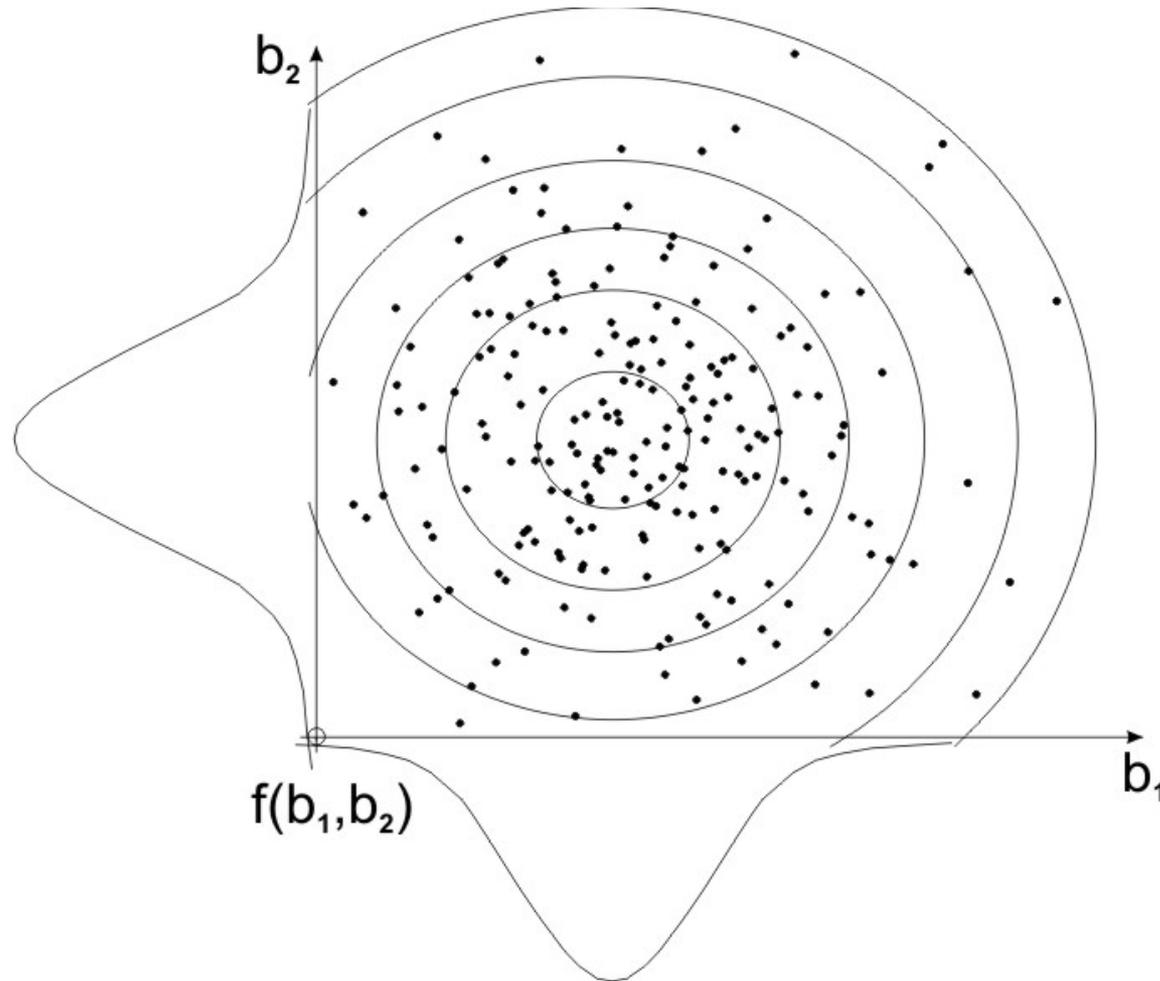
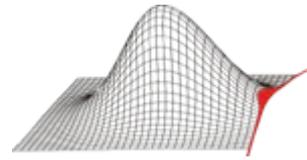
Vor- und Nachteile der Sampling-Methoden

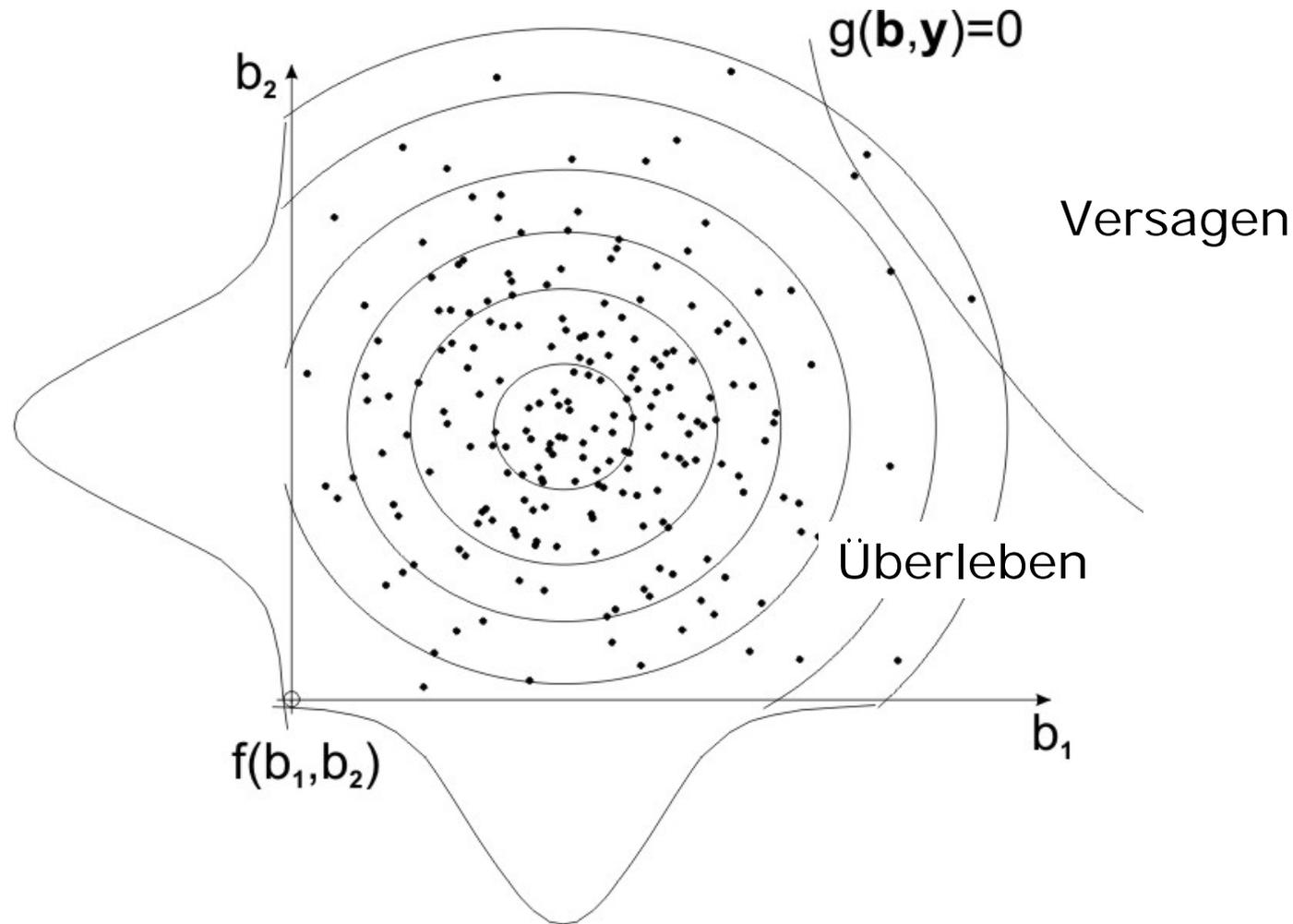
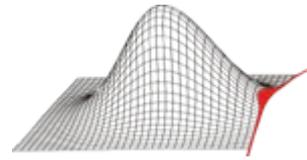
SRS

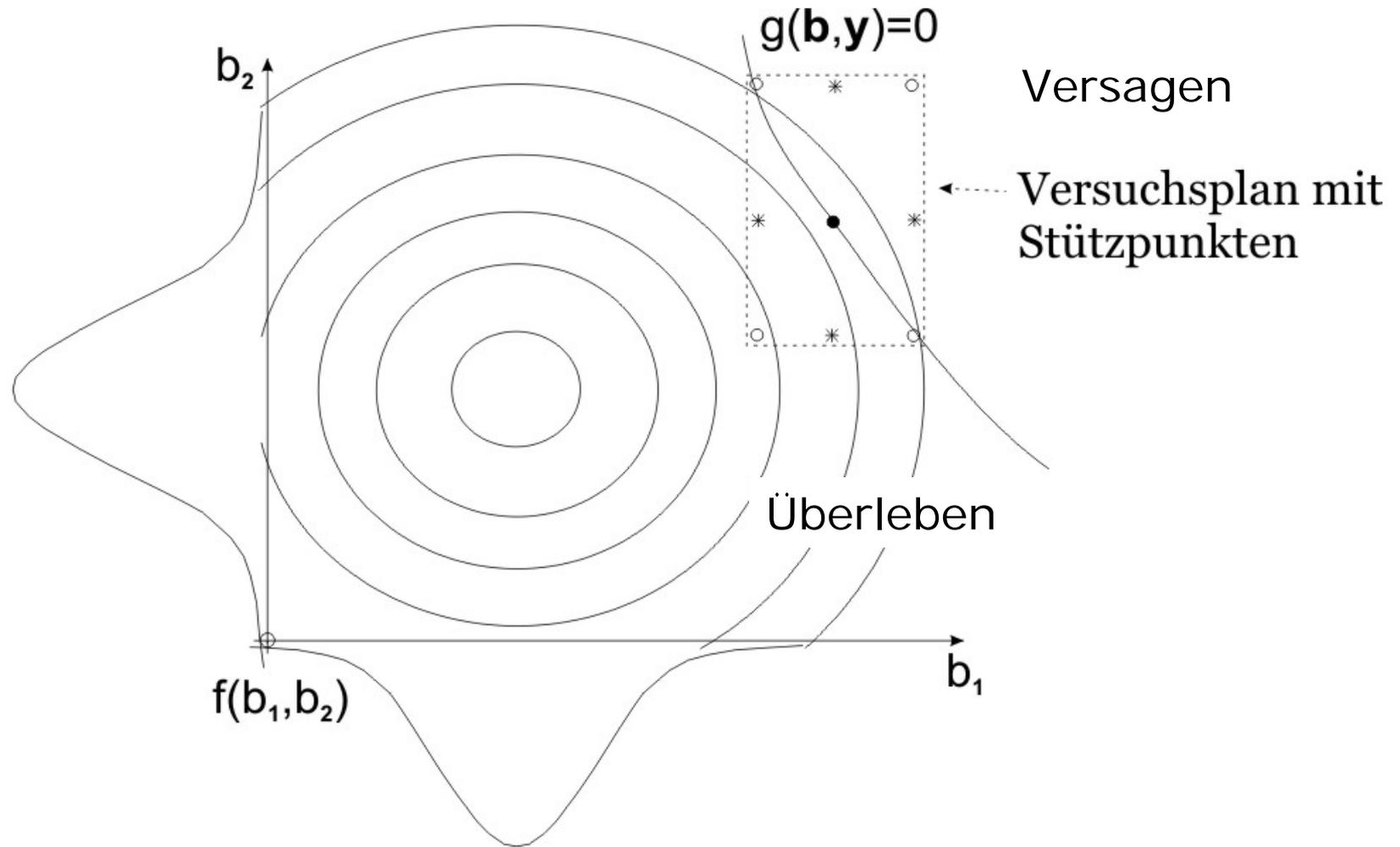
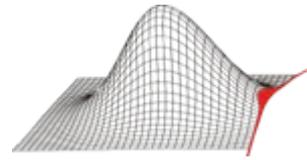
- Zufallszahlen werden „unsystematisch“ erzeugt
- Liefert bei geringen Stichprobenumfang hohe statistische Unsicherheiten

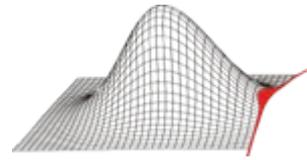
LHS / DS

- Zufallszahlen werden „systematisch“ erzeugt
- Beschreibt die Zufallsvariablen mit wenigen Realisierungen gut



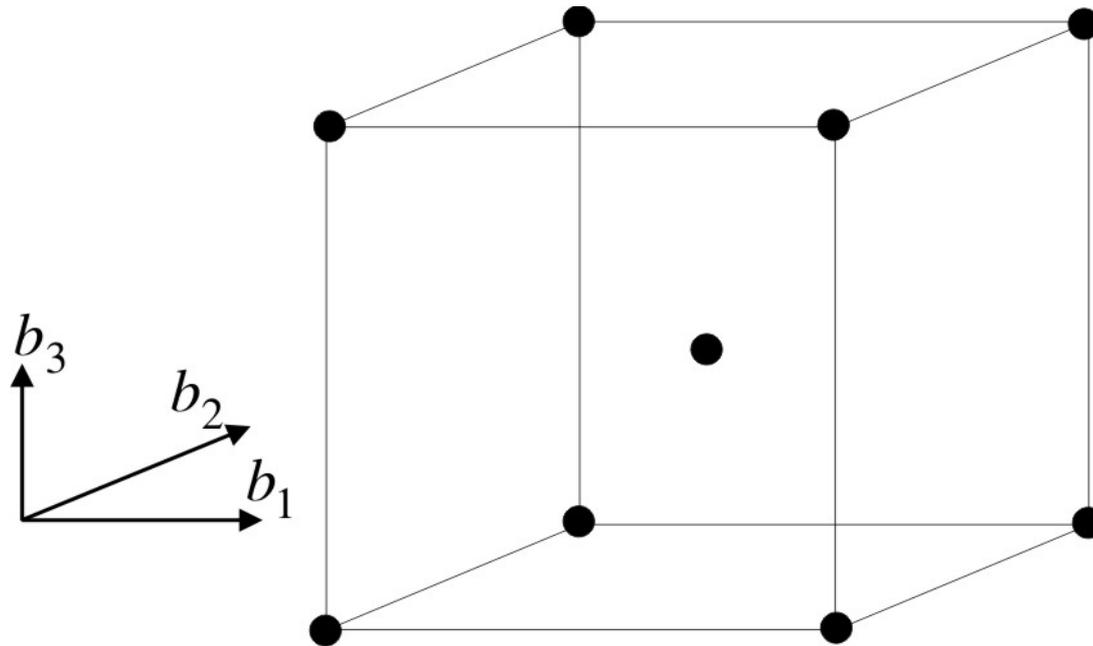


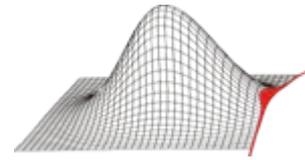




Vollfaktorieller Versuchsplan

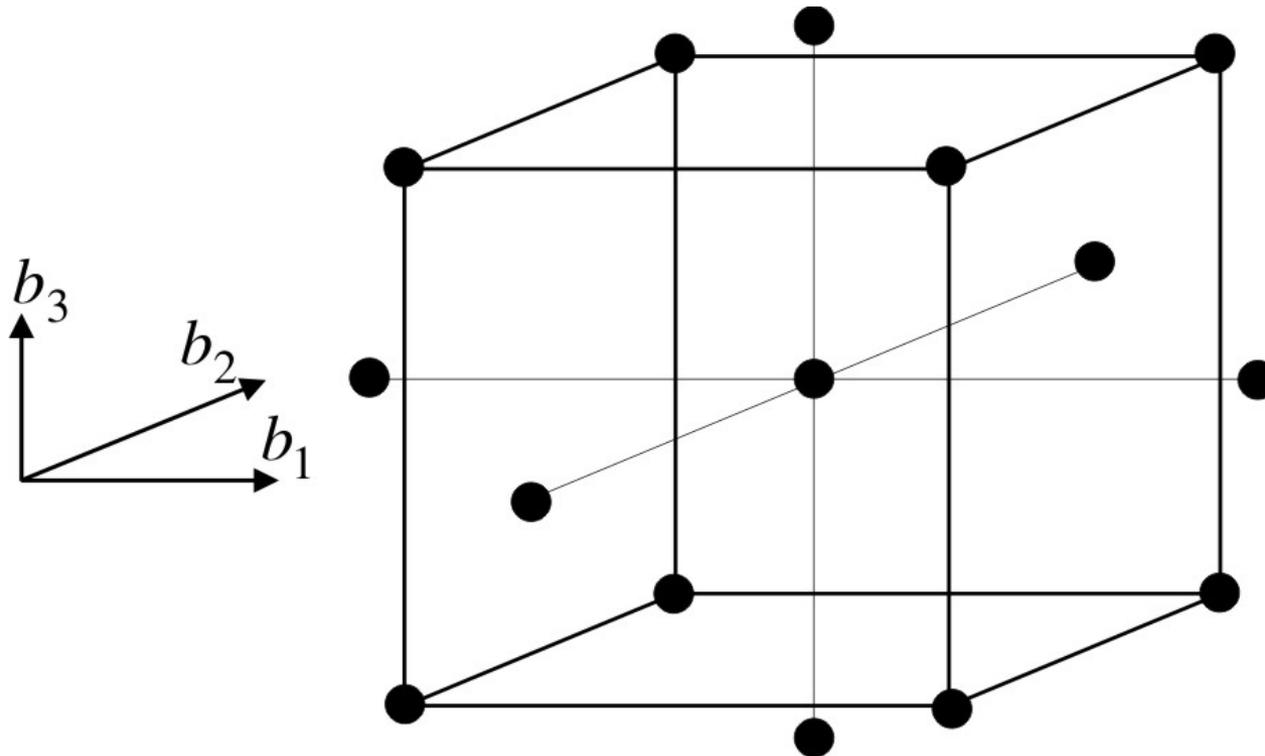
[4,5,6]

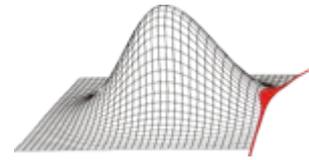




Central-Composite-Design

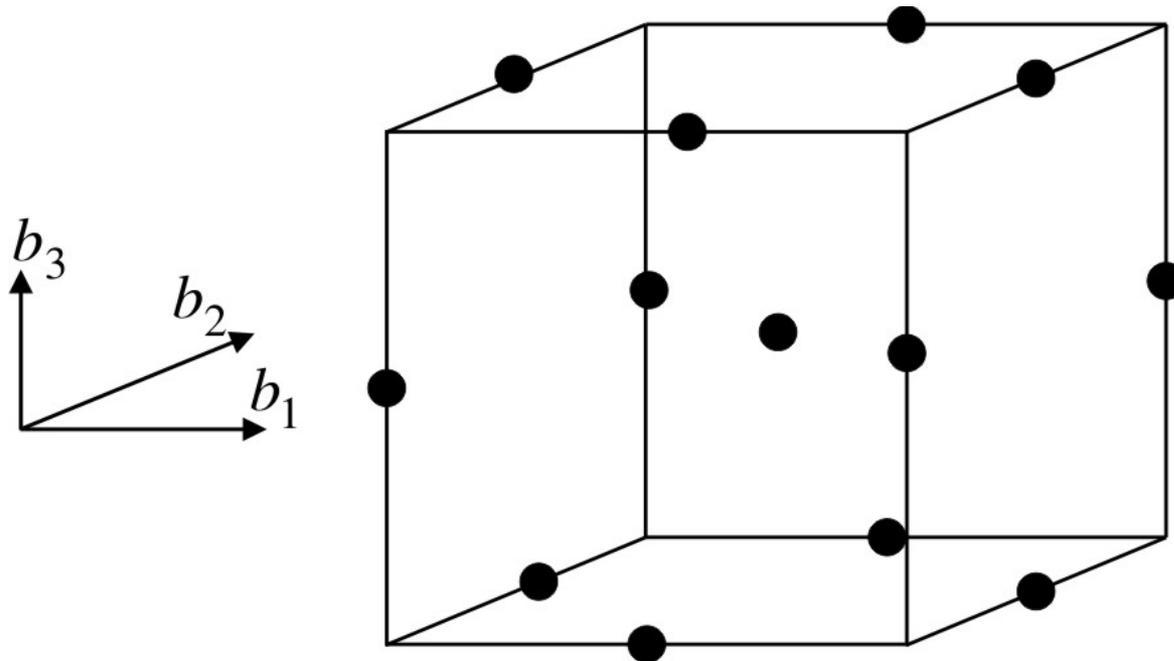
[4,5,6]

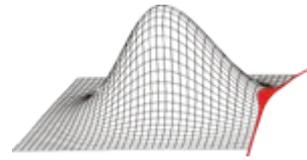




Box-Behnken-Design

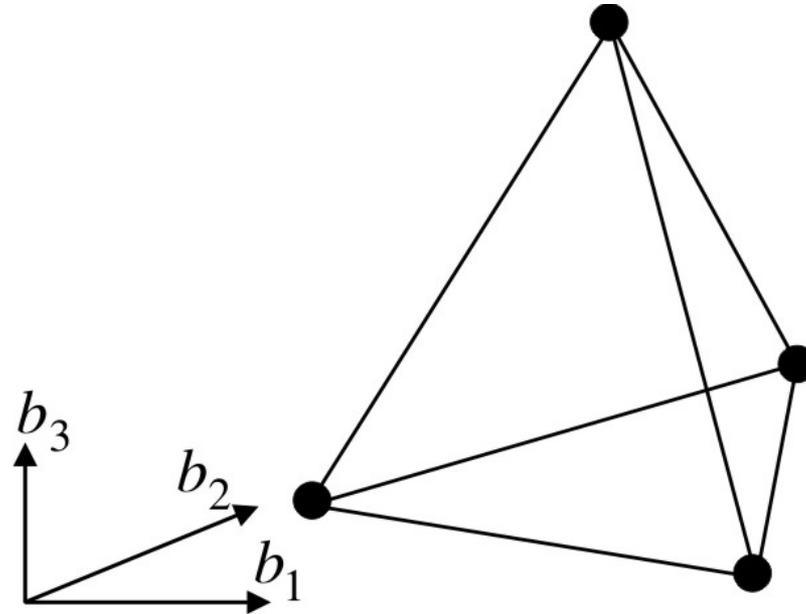
[4,5,6]

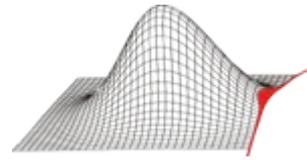




Simplex-Design

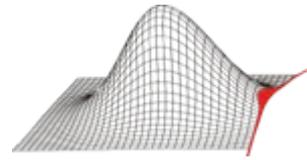
[4,5,6]





| Variablenanzahl | Polynom | | | Simplex | vollfakt. Versuchsplan | CCD | BBD * |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|---------|---------------------------|-------|----------|
| | 1.Ordnung | 2.Ordnung | 3.Ordnung | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | | | | |
| 2 | 3 | 6 | 10 | 3 | 5 | 9 | |
| 3 | 4 | 10 | 20 | 4 | 9 | 15 | 13 |
| 4 | 5 | 15 | 35 | 5 | 17 | 25 | 25 |
| 5 | 6 | 21 | 56 | 6 | 33 | 43 | 41 |
| 6 | 7 | 28 | 84 | 7 | 65 | 77 | 49 |
| 7 | 8 | 36 | 120 | 8 | 129 | 143 | 57 |
| 8 | 9 | 45 | 165 | 9 | 257 | 273 | 113 |
| 9 | 10 | 55 | 220 | 10 | 513 | 531 | 121 |
| 10 | 11 | 66 | 286 | 11 | 1025 | 1045 | 161 |
| 11 | 12 | 78 | 364 | 12 | 2049 | 2071 | 177 |
| 12 | 13 | 91 | 455 | 13 | 4097 | 4121 | 193 |
| 13 | 14 | 105 | 560 | 14 | 8193 | 8219 | 209 |
| 14 | 15 | 120 | 680 | 15 | 16385 | 16413 | 225 |
| 15 | 16 | 136 | 816 | 16 | 32769 | 32799 | 241 |

* Bei den Variablenanzahlen 3-7 und 9-12 sind die originalen BBD [7] dargestellt die anderen beruhen auf Veröffentlichungen von Mee [8]



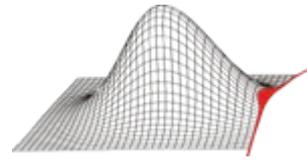
Approximationsfunktion mit Polynomen zweiter Ordnung:

$$y_i = c_0 + c_1 b_{1,i} + c_2 b_{2,i} + c_{11} b_{1,i}^2 + c_{22} b_{2,i}^2 + c_{12} b_{1,i} b_{2,i} + \epsilon.$$

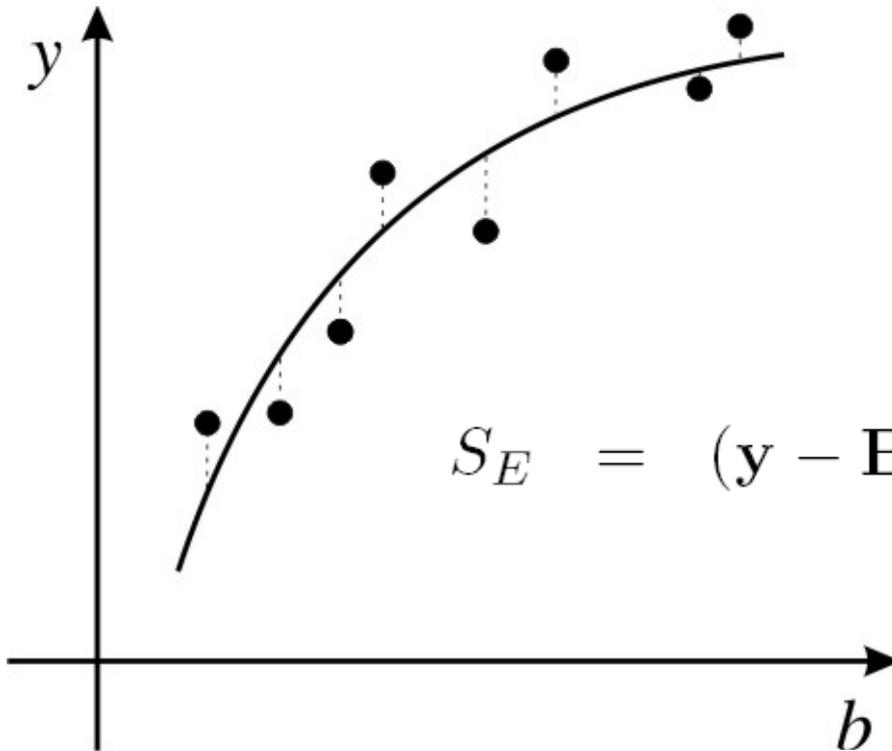
$$\mathbf{y} = \mathbf{BC} + \boldsymbol{\epsilon}.$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n_{sim}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & b_{1,1} & b_{2,1} & b_{1,1}^2 & b_{2,1}^2 & b_{1,1}b_{2,1} \\ 1 & b_{1,2} & b_{2,2} & b_{1,2}^2 & b_{2,2}^2 & b_{1,2}b_{2,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & b_{1,i} & b_{2,i} & b_{1,i}^2 & b_{2,i}^2 & b_{1,i}b_{2,i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & b_{1,n_{sim}} & b_{2,n_{sim}} & b_{1,n_{sim}}^2 & b_{2,n_{sim}}^2 & b_{1,n_{sim}}b_{2,n_{sim}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_{11} \\ c_{22} \\ c_{12} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_{n_{sim}} \end{bmatrix}$$

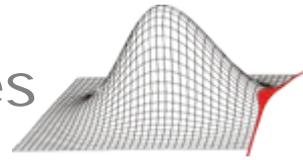


[4,5,6]



$$S_E = (\mathbf{y} - \mathbf{BC})^T (\mathbf{y} - \mathbf{BC}) = \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\epsilon} \longrightarrow \min$$

$$\mathbf{C} = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{y}$$



Bestimmtheitsmaß: $R^2 = \frac{S_R}{S_y}$ [4,5,6]

Summe der Abweichungsquadrate:

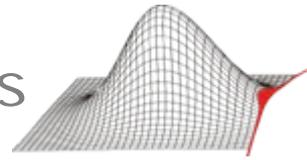
$$S_R = \mathbf{C}^T \mathbf{B}^T \mathbf{y} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n_{sim}} y_i \right)^2}{n_{sim}}$$

Totale Summe der Abweichungsquadrate:

$$S_y = S_R + S_E$$

Summe der Quadrate der Approximationsfehler:

$$S_E = \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \mathbf{C}^T \mathbf{B}^T \mathbf{y}$$



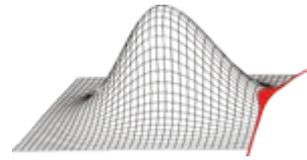
Das Bestimmtheitsmaß R^2 beschreibt den Anteil der Varianz von \mathbf{y} , der durch die Eingangsgrößen \mathbf{b} erklärt wird.

[4,5,6]

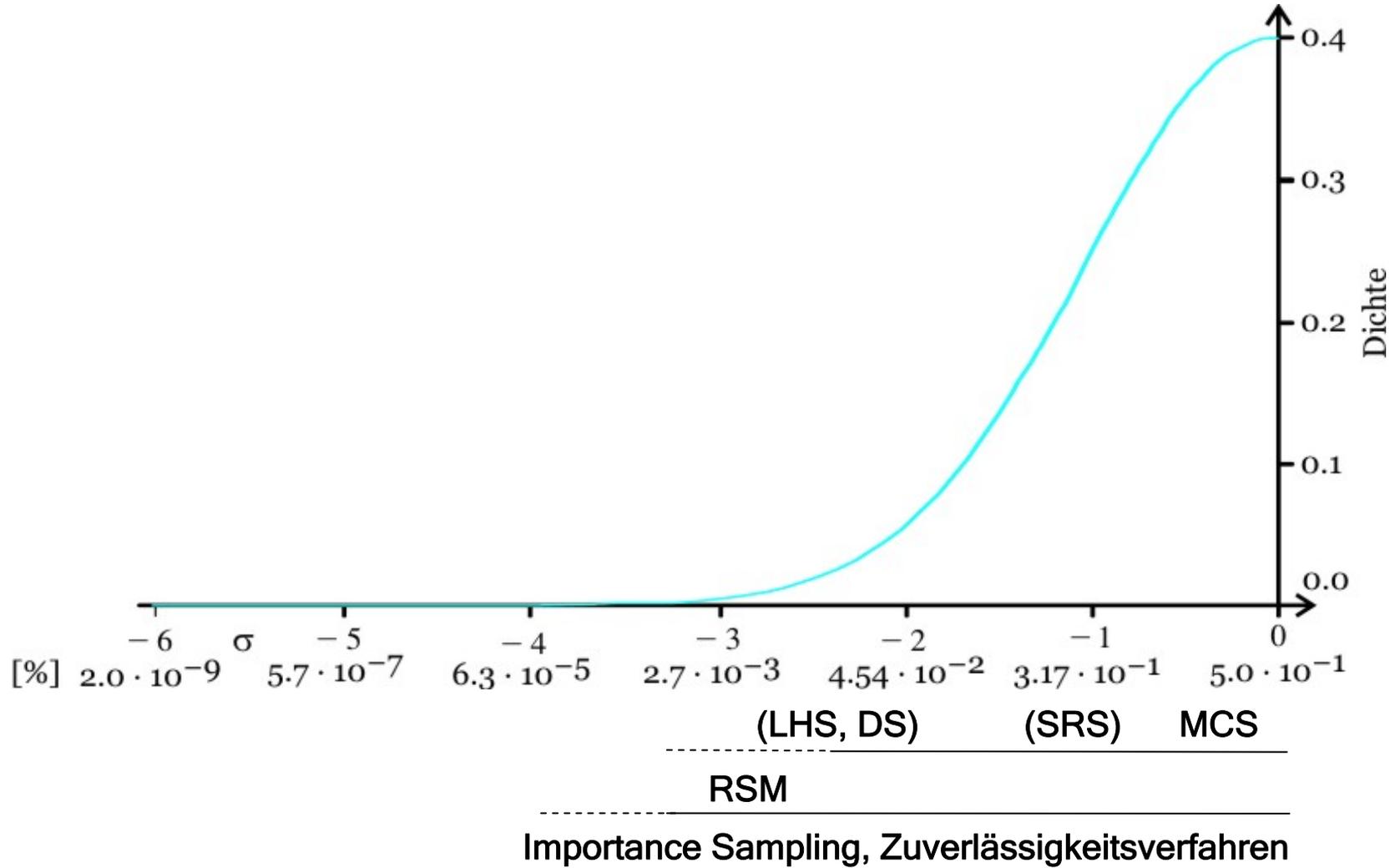
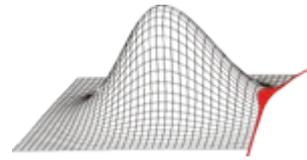
$$R = |r_{\mathbf{y}, \tilde{\mathbf{y}}}|$$

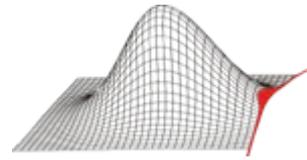
korrigiertes Bestimmtheitsmaß:

$$R_{adj}^2 = 1 - \frac{\frac{S_E}{n_{sim} - n_{koe}}}{\frac{S_y}{n_{sim} - 1}} = 1 - \left(\frac{n_{sim} - 1}{n_{sim} - n_{koe}} \right) (1 - R^2)$$



- Einleitung
- Theoretische Grundlagen der Stochastik
- Probabilistische Methoden
- **Mögliche Ergebnisse von probabilistischen Untersuchungen**
- Mögliche Fehlerquellen bei probabilistischen Untersuchungen
- Zusammenfassung





Notwendige Anzahl der deterministischen Rechnungen:

MCS: SRS $n_{sim} \approx \frac{100}{\tilde{P}_f}$ LHS, DS $n_{sim} \approx \frac{10}{\tilde{P}_f}$

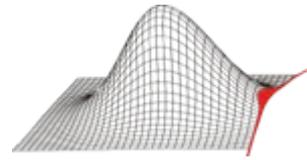
RSM: - Stark abhängig von der Variablenanzahl
- Größer bei unbekannter Lage der Versagensfunktion
- Betrachtung jeweils nur einer Ergebnisgröße möglich

Importance Sampling:

- Größer bei unbekannter Lage der Versagensfunktion
- Betrachtung jeweils nur einer Ergebnisgröße möglich

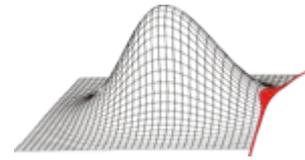
Zuverlässigkeitsverfahren:

- Betrachtung jeweils nur einer Ergebnisgröße möglich
- Numerische Probleme bei stark nichtlinearen Versagensfunktionen

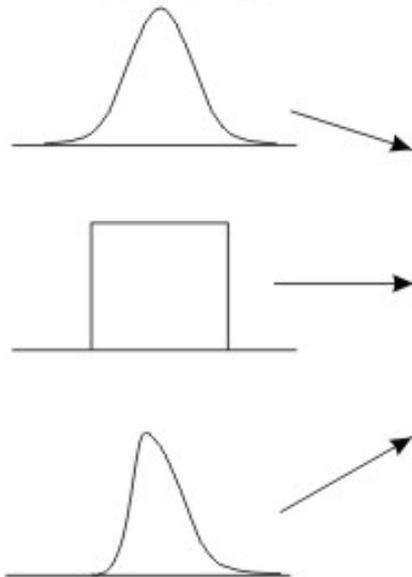


[12]

- Ingenieurmäßige (deterministische) Maße:
 - Überschreiten von Grenzwerten
 - Auftreten von unerwünschten plötzlichen Änderungen der Ergebnisgrößen (z.B. lokales Maximum der Ergebnisgröße)
 - Ansprechen von Systeminstabilitäten (z.B.: Beulen)
- Statistische Maße
 - Lage der Mittelwerte der Ergebnisgrößen
 - Größe der Variationskoeffizienten der Ergebnisgrößen

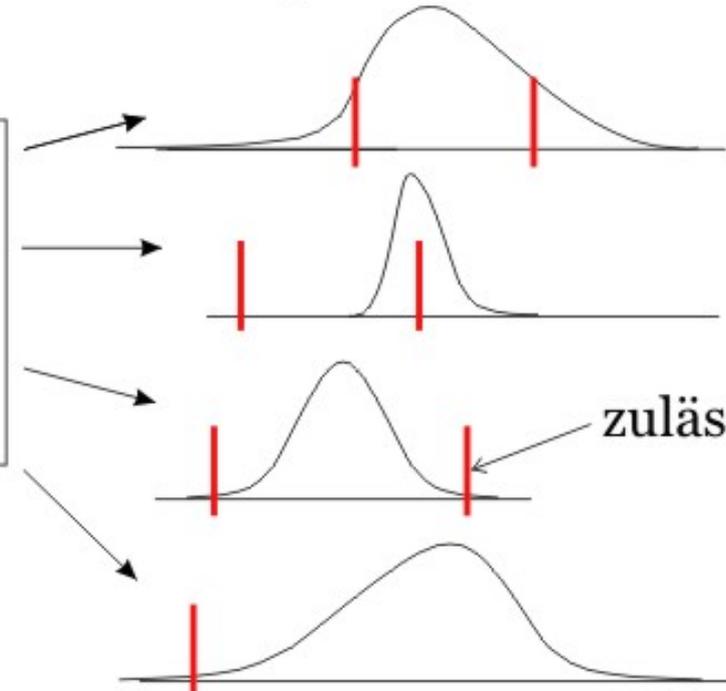


Eingangsgrößen

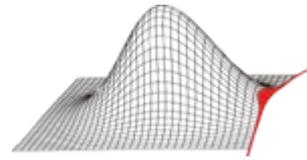


determinis-
tisches
Modell

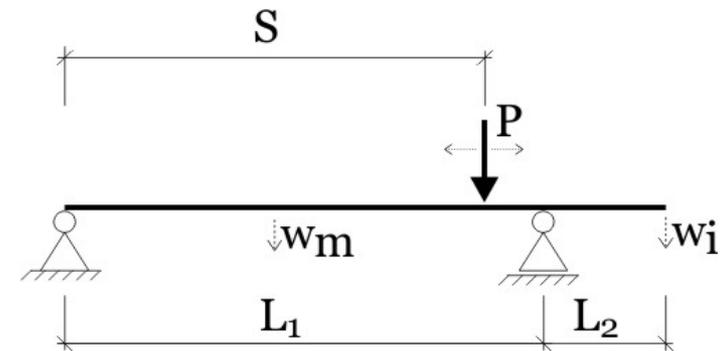
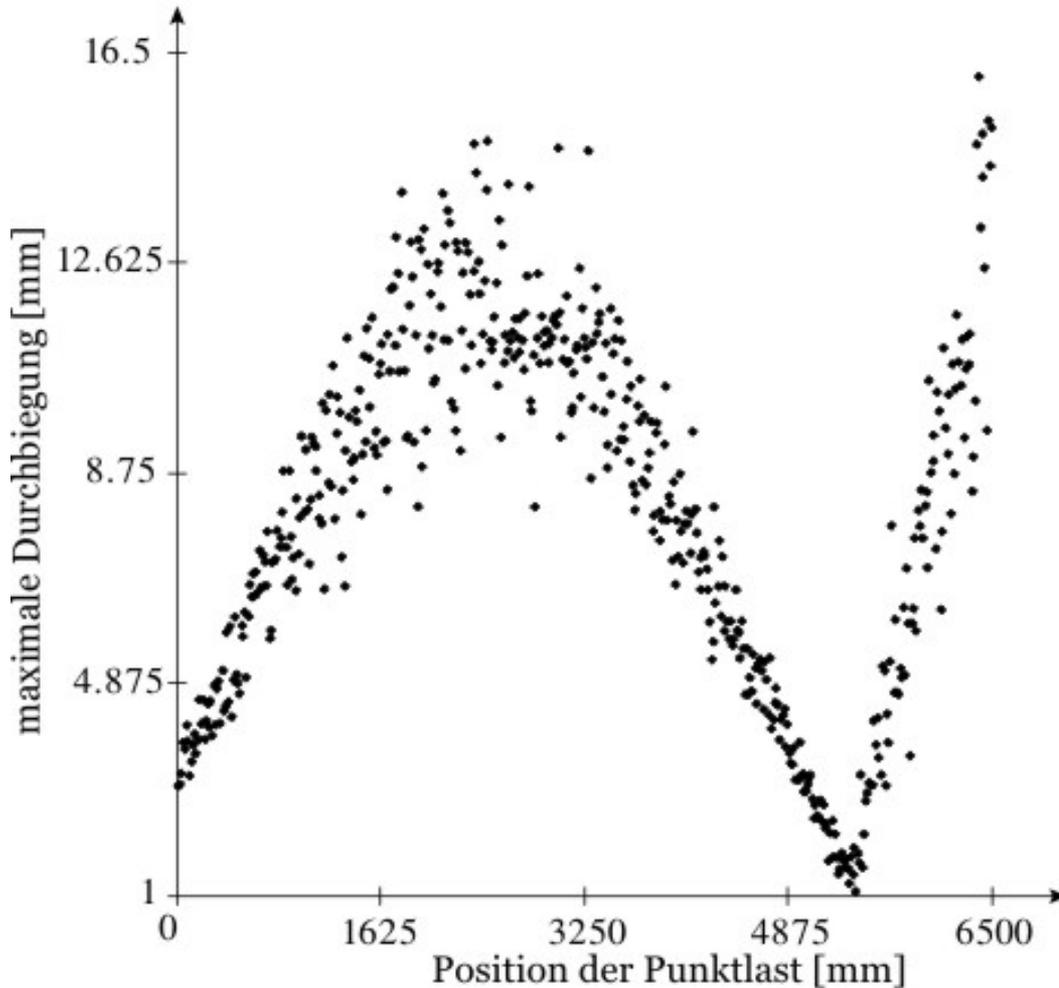
Ergebnisgrößen



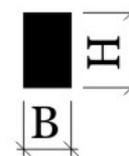
zulässige Streubreite

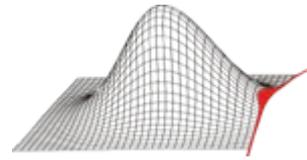


Verzweigungssystem

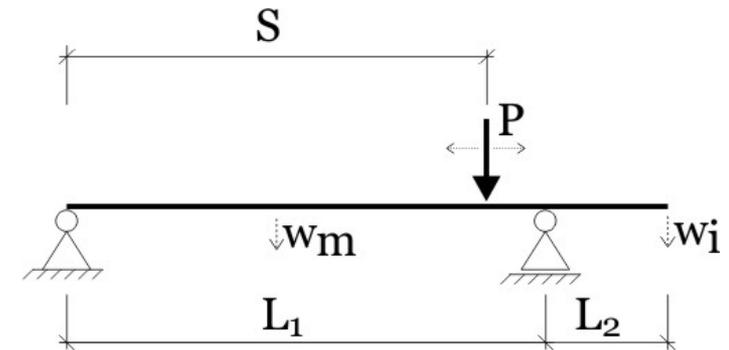
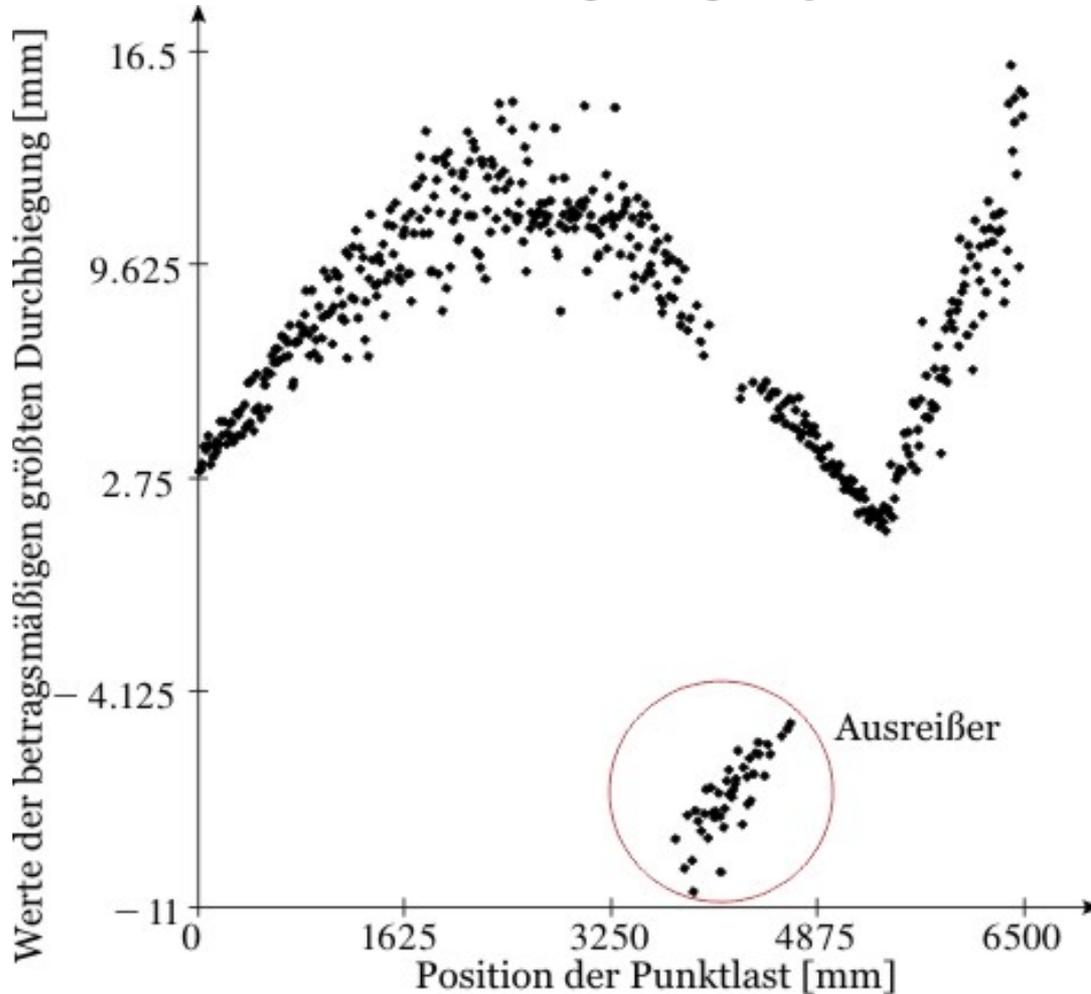


vergrößerte
Seitenansicht

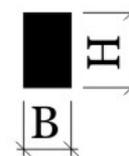


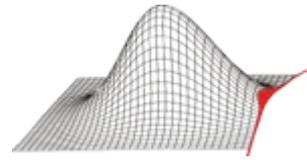


Verzweigungssystem mit Ausreißern



vergrößerte
Seitenansicht





Notwendige Anzahl der det. Rechnungen bei einer MCS:

Überschreiten von Grenzwerten, Auftreten von unerwünschten plötzlichen Änderungen der Ergebnisgrößen, Ansprechen von Systeminstabilitäten:

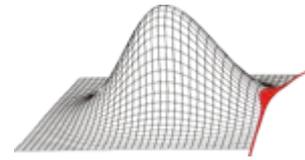
- Abhängig von der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

Lage der Mittelwerte der Ergebnisgrößen:

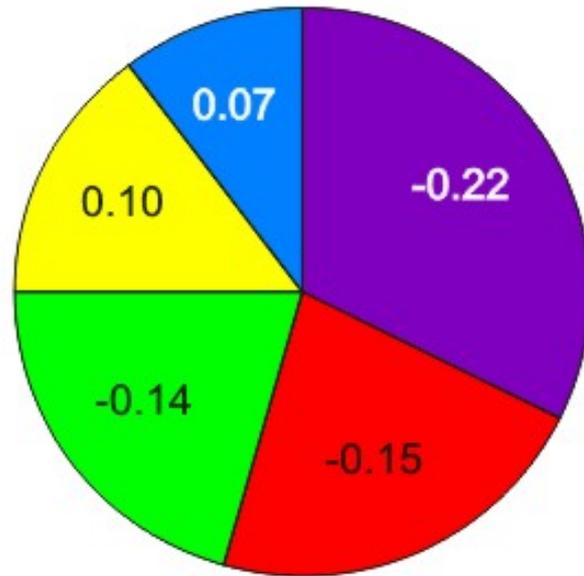
- $\approx 30 \dots 50$

Größe der Variationskoeffizienten der Ergebnisgrößen:

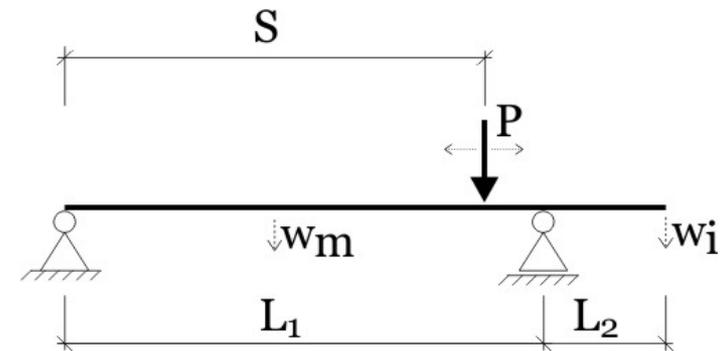
- $\approx 50 \dots 100$



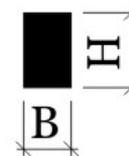
Target-Variable: max. Durchbiegung



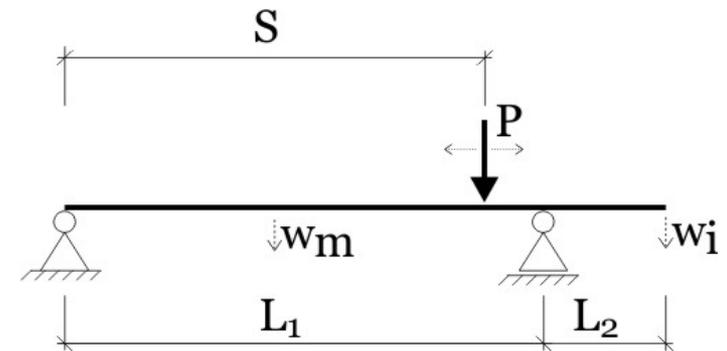
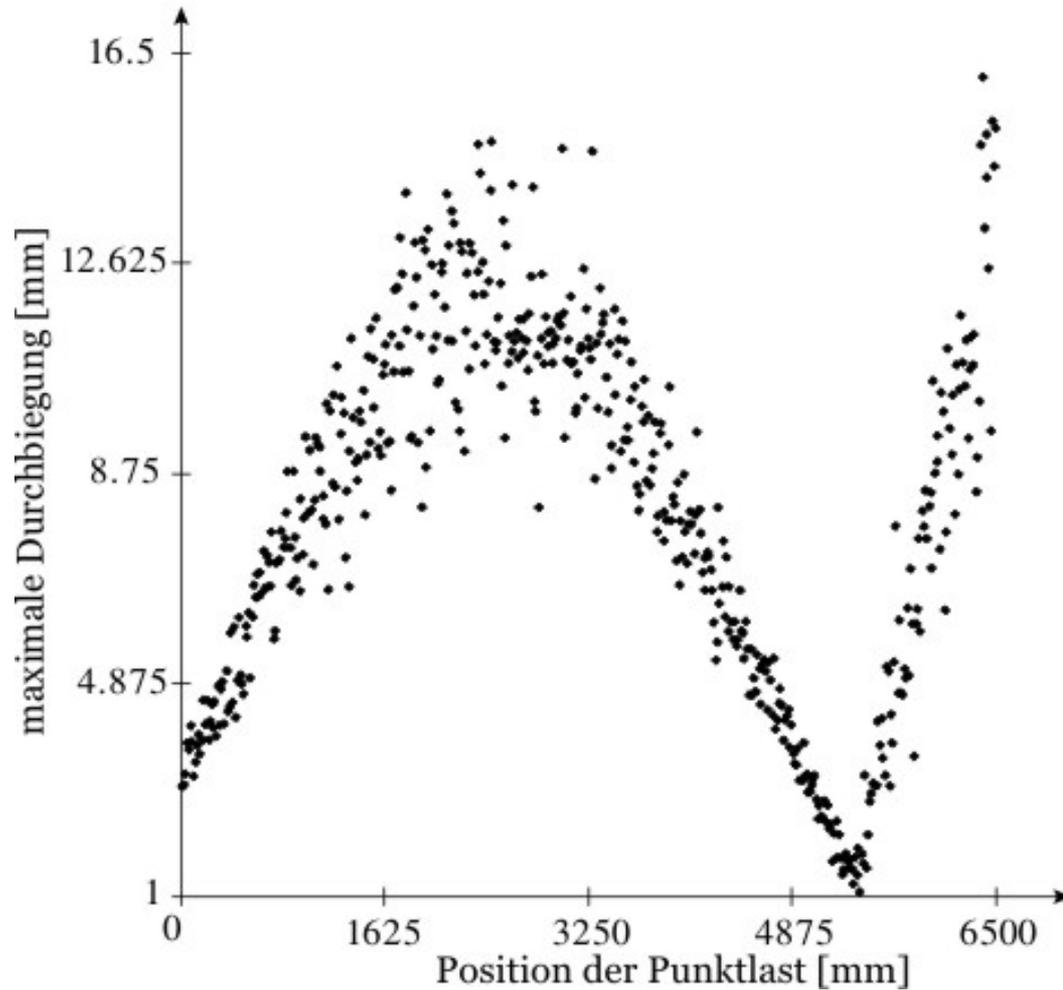
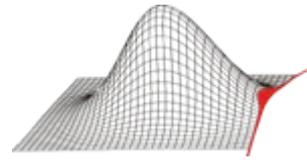
- Höhe
- E-Modul
- Position Kraft
- Kraft
- Breite



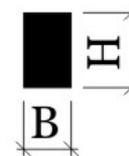
vergrößerte
Seitenansicht

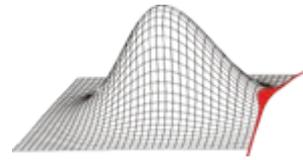


$$r_{i,rel} = \frac{|r_i|}{\sum_{i=1}^{n_b} |r_i|}$$



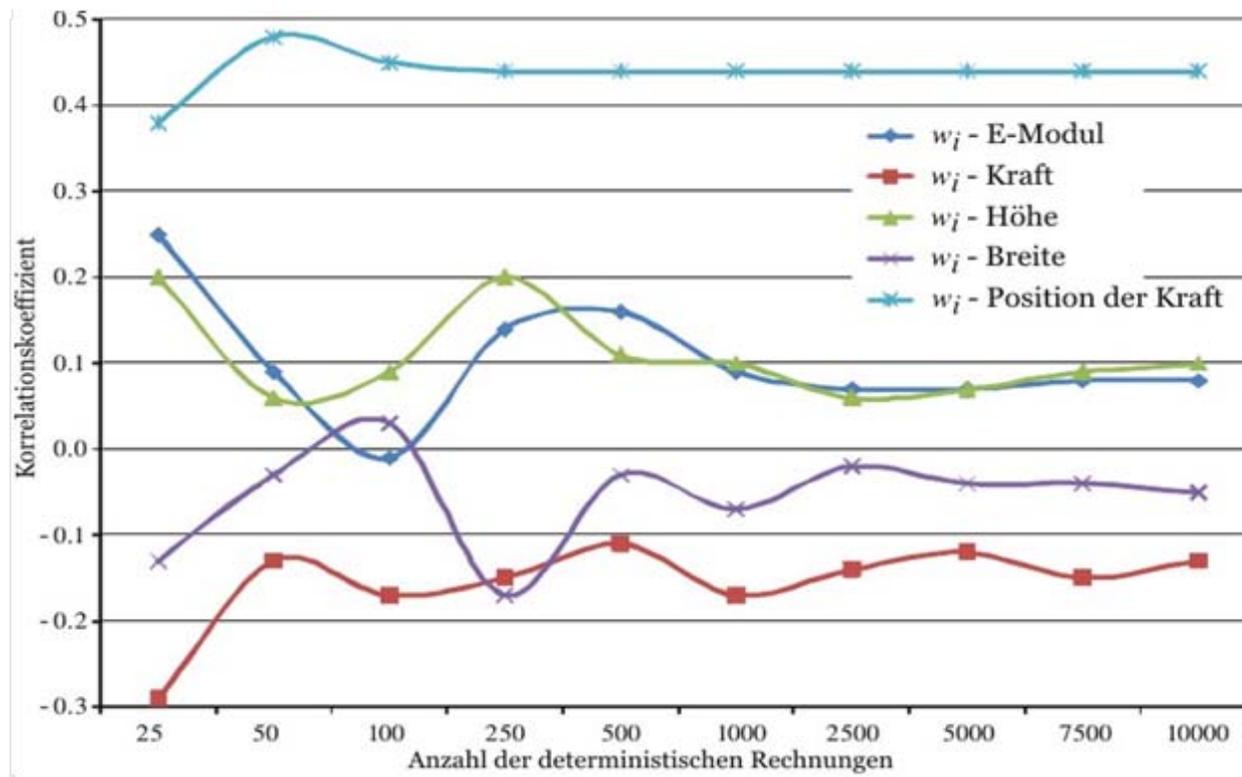
vergrößerte
Seitenansicht

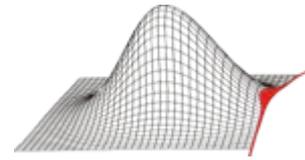




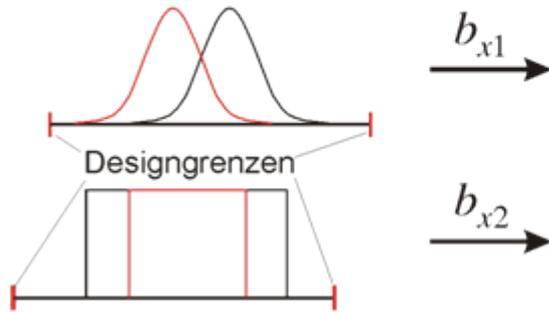
Notwendige Anzahl der det. Rechnungen bei einer MCS:

- Abhängig von der Anzahl der probabilistischen Eingangsgrößen
- Abhängig von den Beträgen der zu ermittelnden Korrelationskoeffizienten

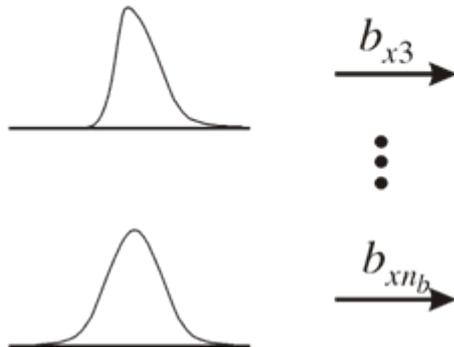




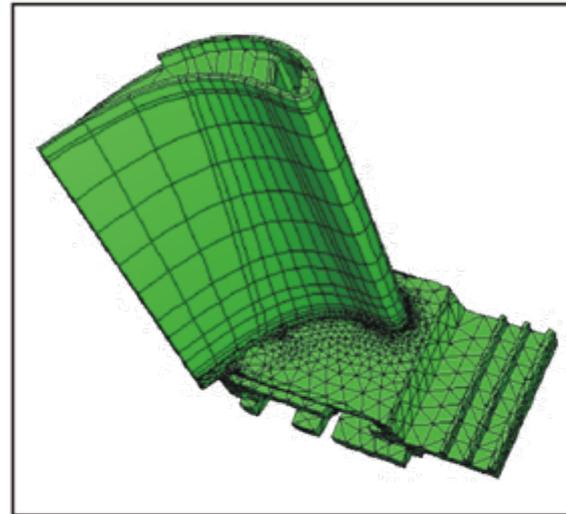
probabilistische Design-Eingangsgrößen



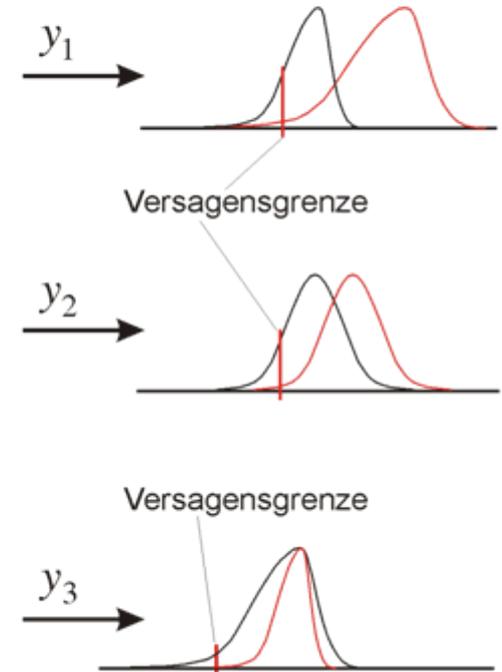
probabilistische Eingangsgrößen

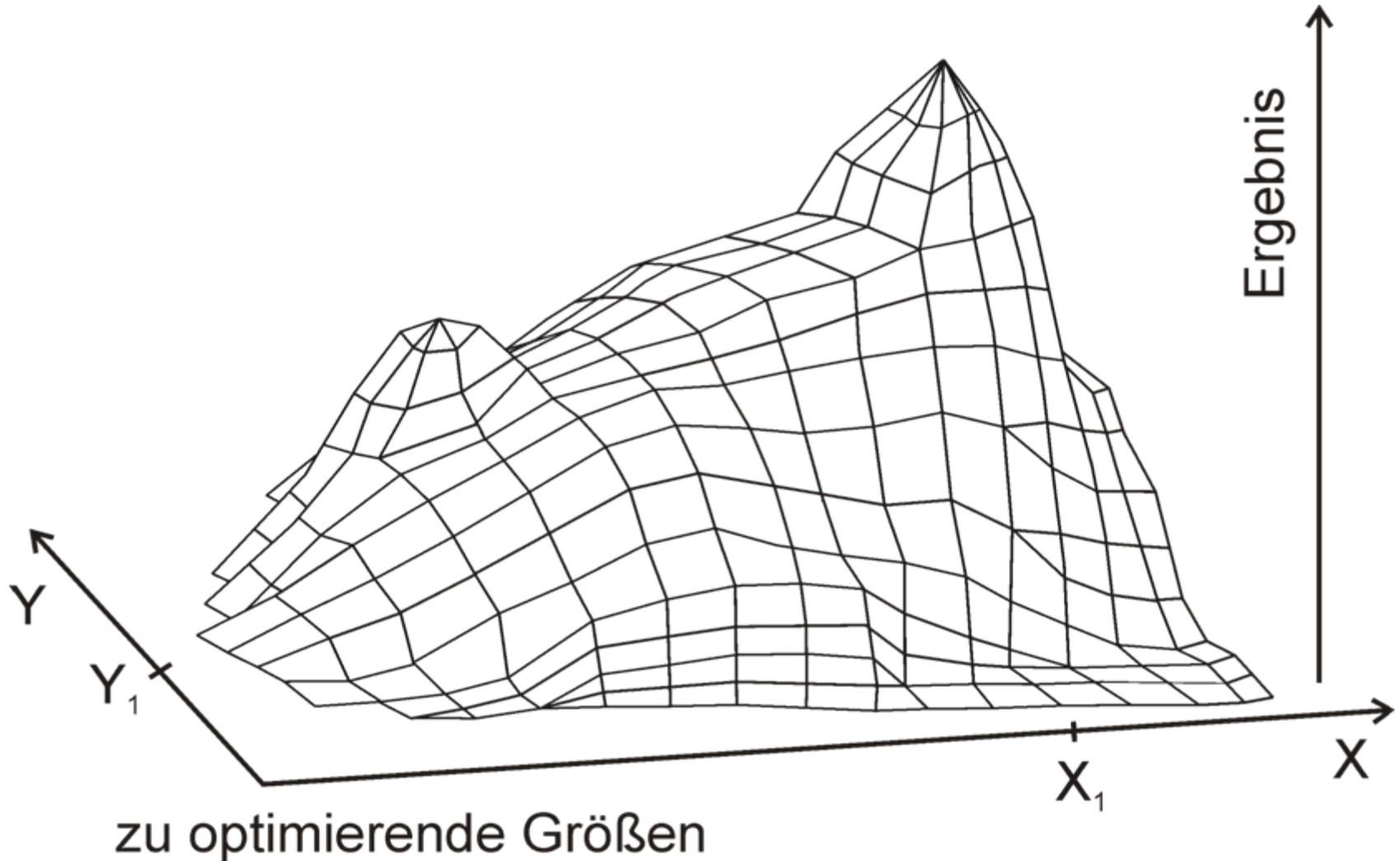
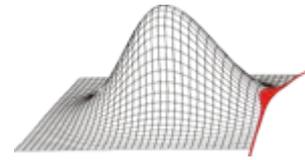


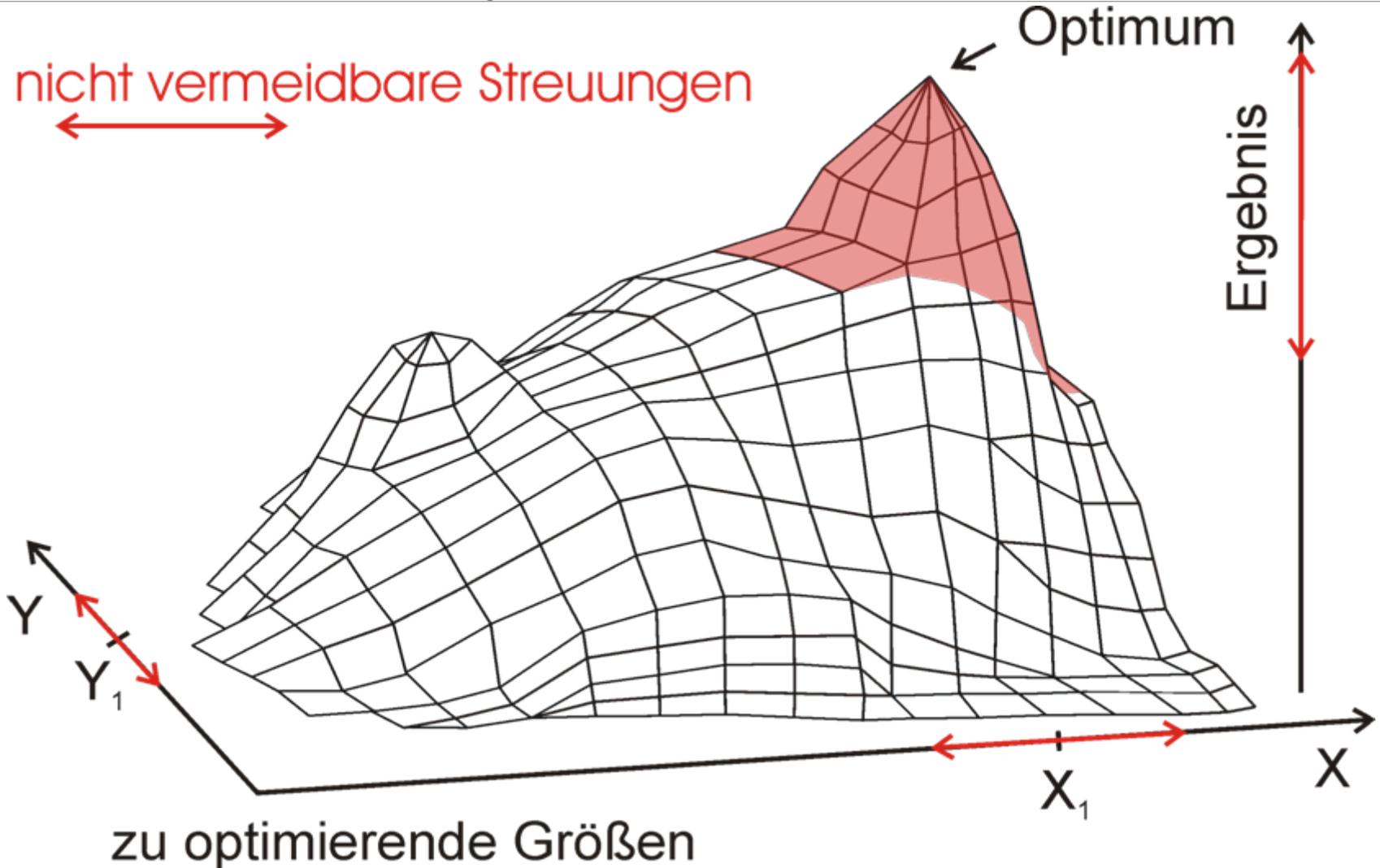
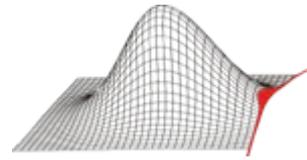
deterministisches Modell

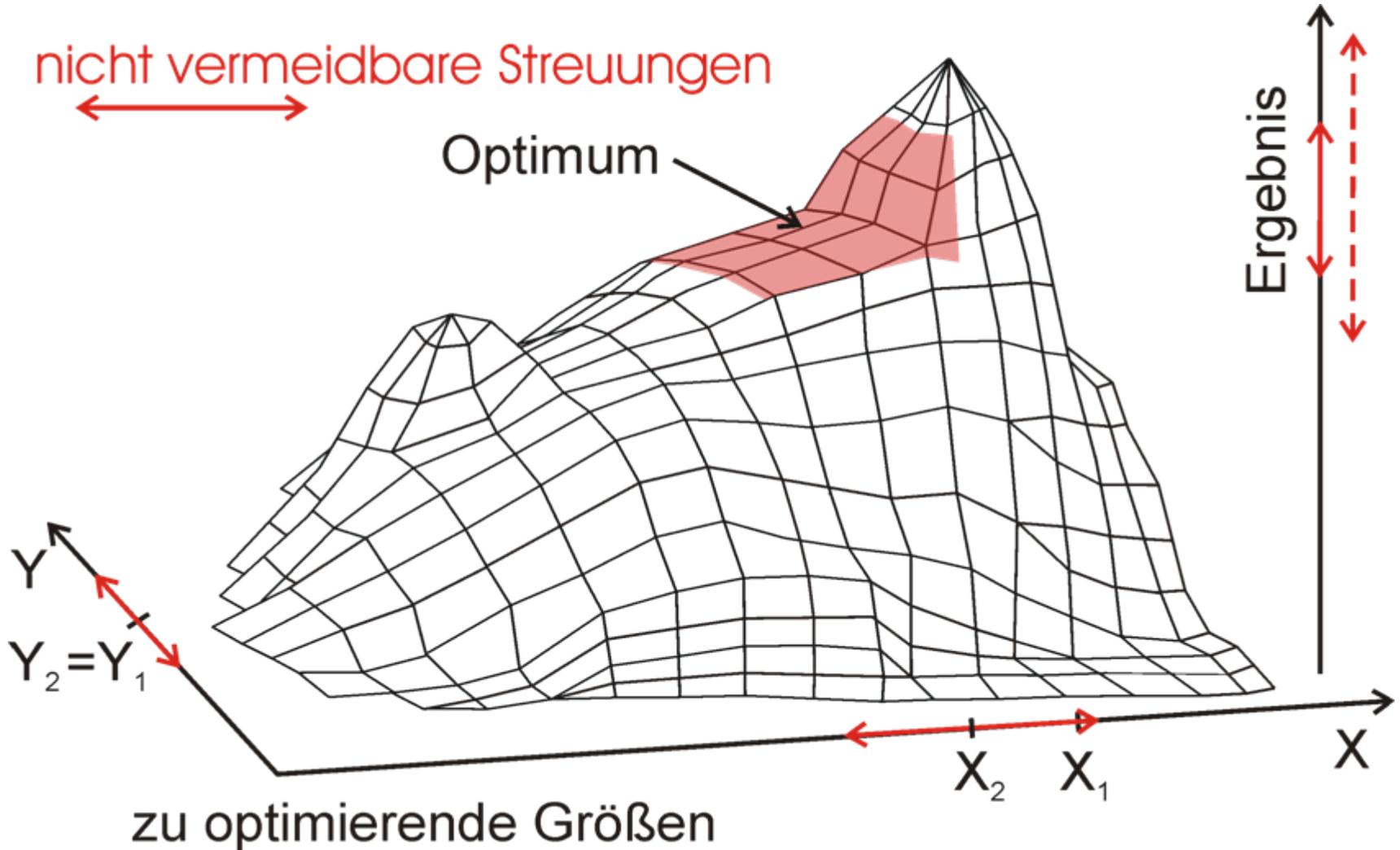
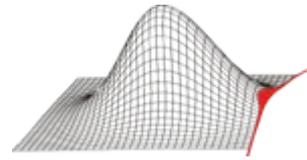


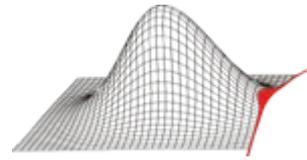
Beispiele für das Verhalten der Ergebnisgrößen



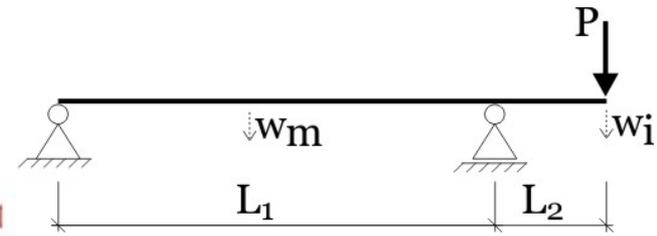
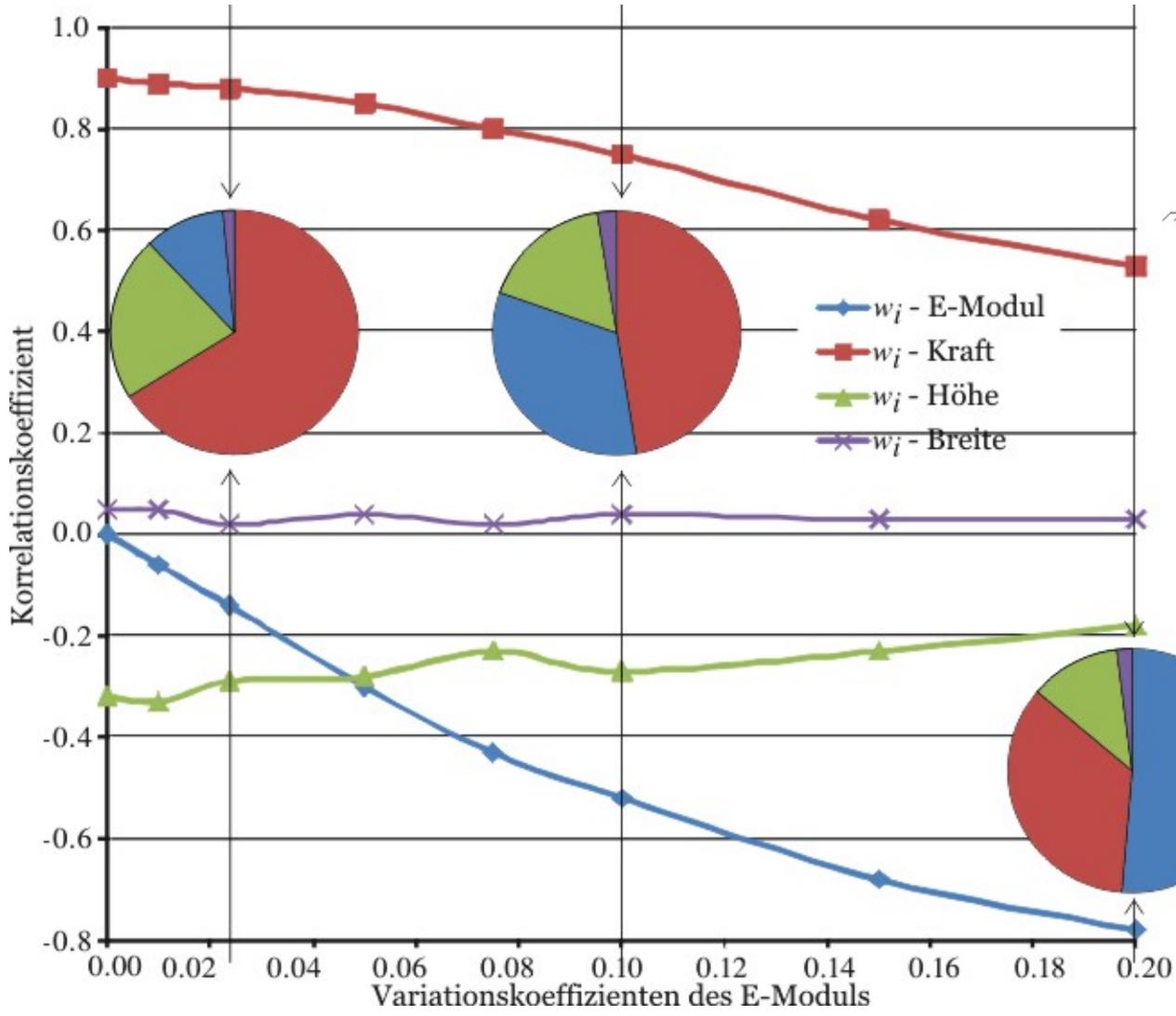
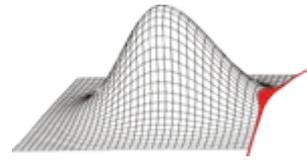




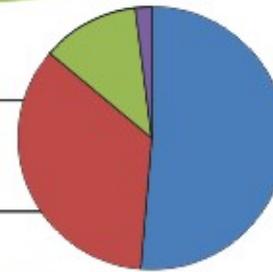
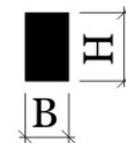


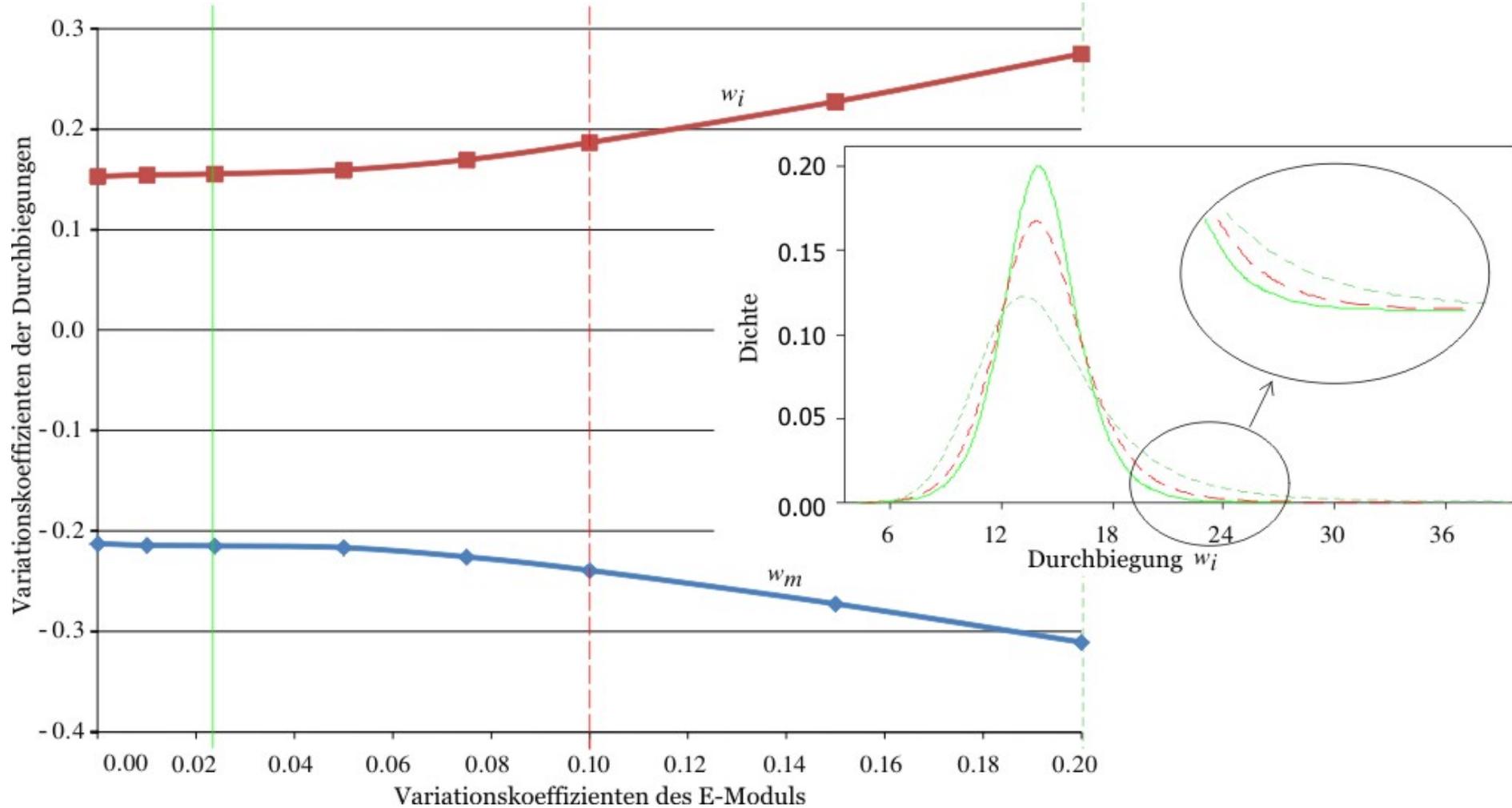
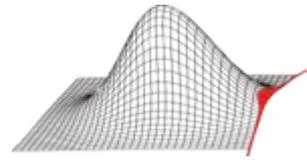


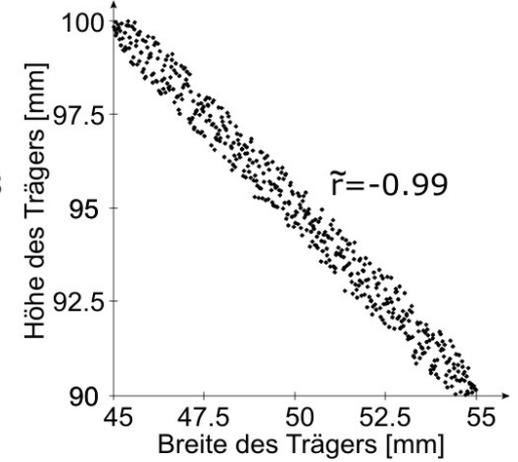
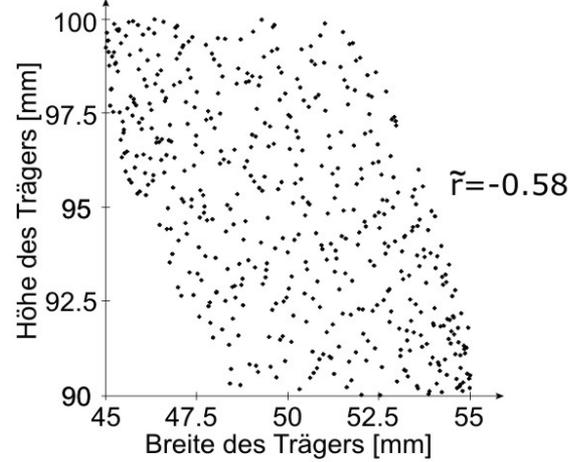
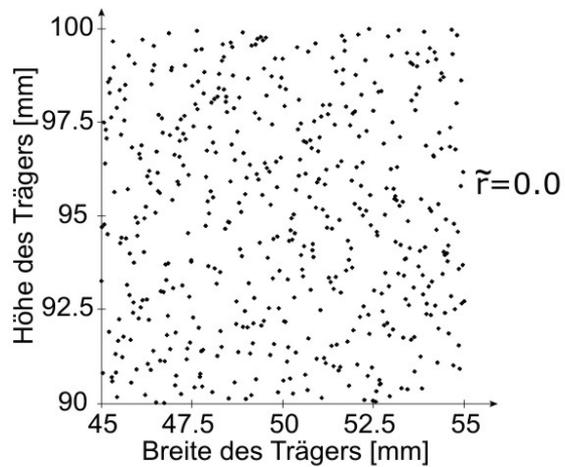
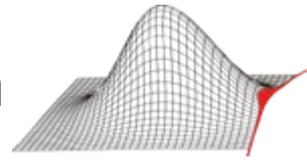
- Einleitung
- Theoretische Grundlagen der Stochastik
- Probabilistische Methoden
- Mögliche Ergebnisse von probabilistischen Untersuchungen
- **Mögliche Fehlerquellen bei probabilistischen Untersuchungen**
- Zusammenfassung



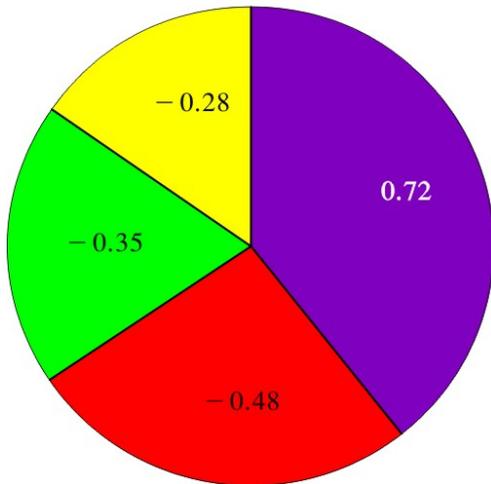
vergrößerte Seitenansicht





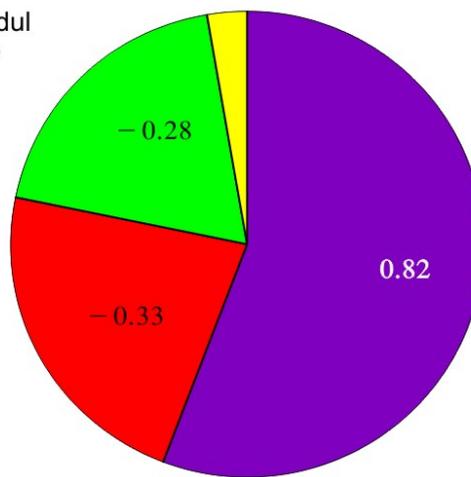


Target-Variable: w_j

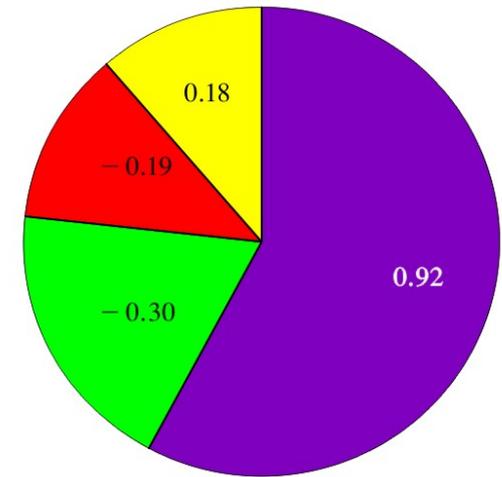


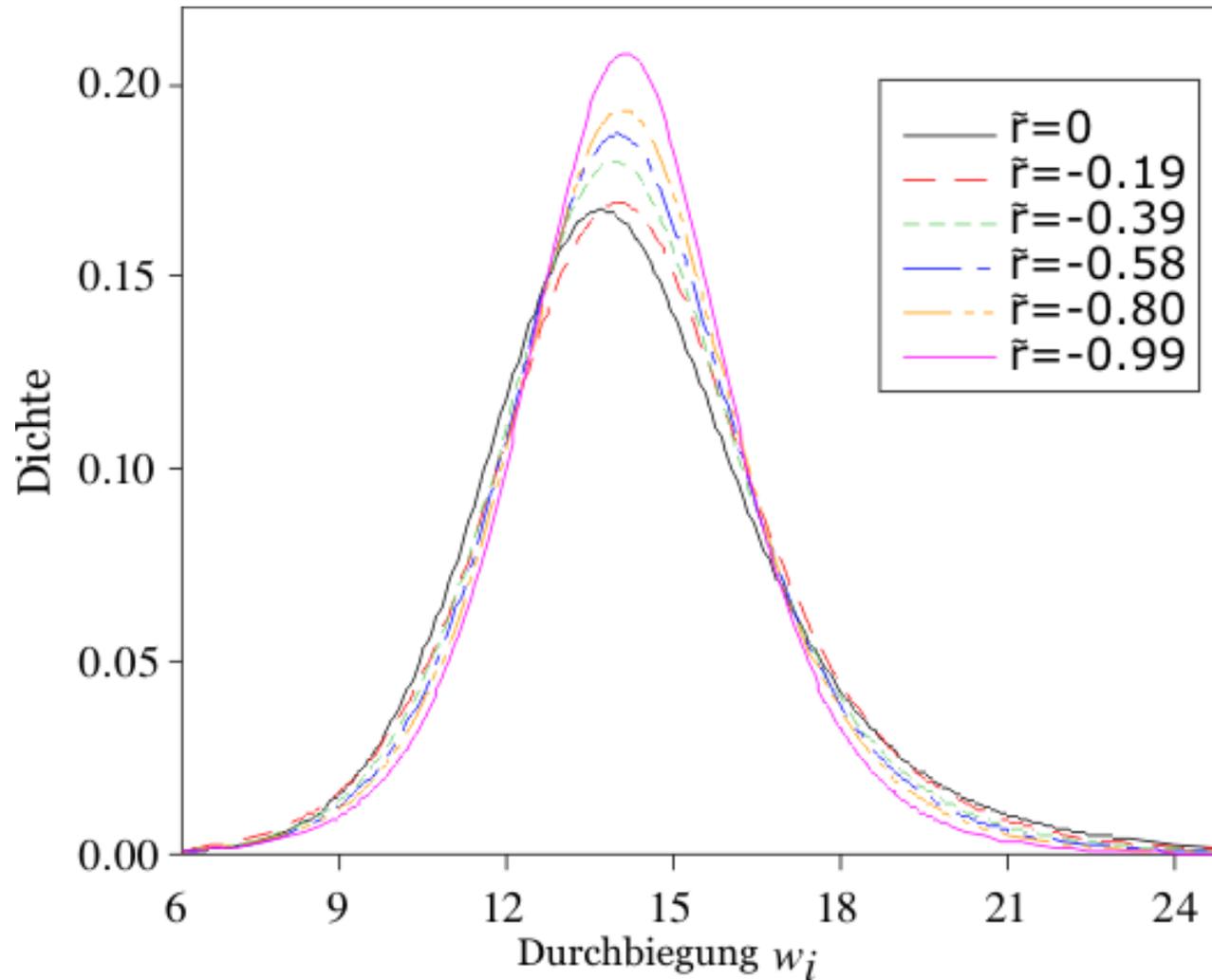
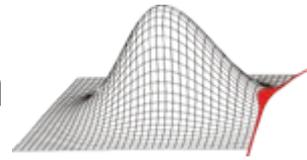
Target-Variable: w_j

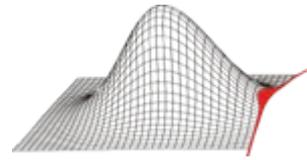
■ Kraft
■ Höhe
■ E-Modul
■ Breite



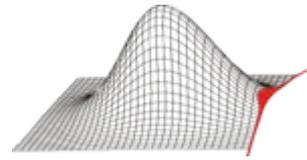
Target-Variable: w_j







- Einleitung
- Theoretische Grundlagen der Stochastik
- Probabilistische Methoden
- Mögliche Ergebnisse von probabilistischen Untersuchungen
- Mögliche Fehlerquellen bei probabilistischen Untersuchungen
- **Zusammenfassung**



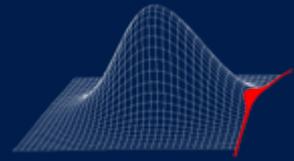
Probleme

Vorteile

bei der Anwendung der probabilistischen Methoden

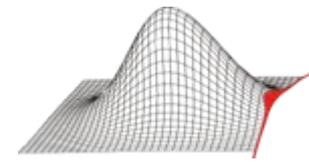
- ausreichende Datenbasis für stochastische Variablen
- höherer Ingenieuraufwand parametrische Modelle bezüglich der stochastischen Variablen, Interpretation der Ergebnisse
- hoher Berechnungsaufwand durch mehrfache Strukturanalysen

- Versagenswahrscheinlichkeit keine akkumulierten konservativen Annahmen
- Robustheit des Designs
- Sensitivität bezüglich der stochastischen Variablen
- Kostengünstigeres Design größere Toleranzen wenn möglich, kleinere Toleranzen wenn nötig

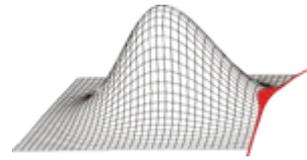


Grundlagen der Probabilistik

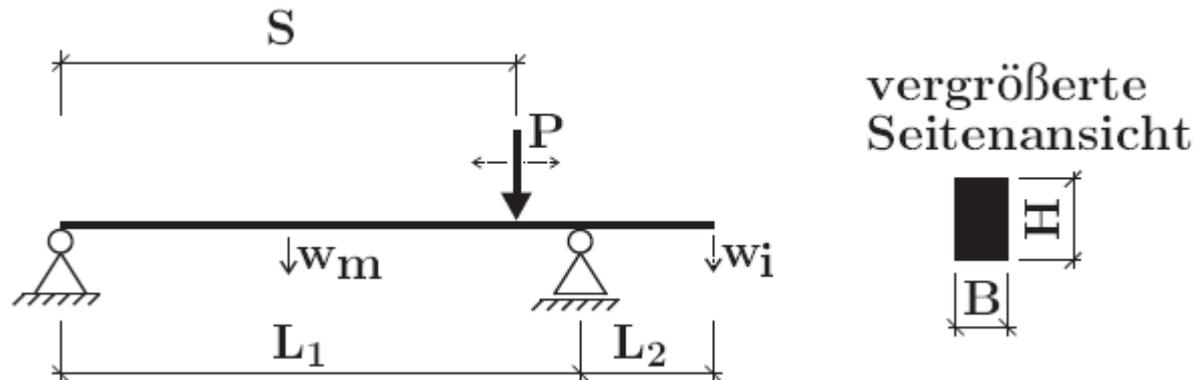
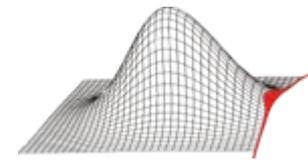
Matthias Voigt



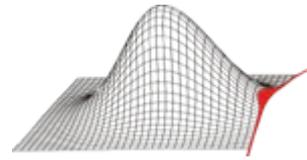
- [1] SACHS, L.: *Angewandte Statistik, Anwendung statistischer Methoden*. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 2004.
- [2] KECECIOGLU, D.: *Reliability and Life Testing Handbook*. Prentice Hall PTR, New Jersey, 1993.
- [3] FISHER, R. A.: *Statistical Methods for Research Workers*. Oliver & Boyd, Edinburgh, 1970.
- [4] MONTGOMERY, D. C.: *Design and Analysis of Experiments*. John Wiley & Son, Inc, New York, 2001.
- [5] MYERS, R. H.; MONTGOMERY, D. C.: *Response Surface Methodology*. John Wiley & Son, Inc, New York, 1995.
- [6] NETER, J.; KUTNER, M. H.; NACHTSHEIM, C. J.; WASSERMANN, W.: *Applied Linear Statistical Models*. WCB McGraw-Hill, New York, 1996.
- [7] BOX, G. E. P.; BEHNKEN, D. W. : *Some New Three-Level Designs for the Study of Quantitative Variables*. Technometrics, University of Princeton:455–475, 1960.
- [8] MEE, R. W.: *New Box-Behnken Designs*. TN 37996-0532, Department of Statistics, University of Tennessee, Knoxville, 2001.
- [9] WILL, J.; BUCHER, C.: *Statistische Maße für rechnerische Robustheitsbewertungen CAE gestützter Berechnungsmodelle*. Weimarer Optimierungs- und Stochastiktag 3.0, 2006.
- [10] ANDERSON, T. W.; DARLING, D. A.: *Asymptotic Theory of Certain "Goodness of Fit" Criteria Based on Stochastic Processes*. Annals of Mathematical Statistics 23, Seiten 193–212, 1952.



- [11] STEPHENS, M. A.: *EDF Statistics for Goodness of Fit and Some Comparisons*. Journal of the American Statistical Association, Vol. 69, Seiten 730–737, 1974.
- [12] WILL, J.; ROOS, D.; RIEDEL, J.; BUCHER, C.: *Robustheitsbewertung in der stochastischen Strukturmechanik*. NAFEMS Seminar: Use of Stochastics in FEM Analyses, 2003.
- [13] MCKAY, M. D.; CONOVER, W. J.; AND BECKMAN, R. J.: *A Comparison of Three Methods for Selecting Values of Input Variables in the Analysis of Output from a Computer Code*. Technometrics, 21:239–245, 1979.
- [14] SALIBY, E.: *Descriptive Sampling: An Improvement Over Latin Hypercube Sampling*. Proceedings of the Winter Simulation Conference, 1997.



| Name | Verteilungsart | Verteilung |
|--------------------------------|----------------|--|
| Höhe des Trägers (H) | gleich | $[95, 105][mm]$ |
| Breite des Trägers (B) | gleich | $[45, 55][mm]$ |
| E-Modul (E) | normal | $\mu = 210000N/mm^2, \sigma = 10000N/mm^2$ |
| Punktlast (P) | normal | $\mu = 2500N, \sigma = 300N$ |
| Position der Punktlast (S) | gleich | $[0, L_1 + L_2]$ |



Verformungen:

infolge Eigengewicht q :

$$w_m = \left(\frac{L_1^2}{2,4} - L_2^2 \right) \frac{qL_1^2}{32EI}$$

$$w_i = \left(\frac{L_2^3}{8} + \frac{L_2^2 L_1}{6} - \frac{L_1^3}{24} \right) \frac{qL_2}{EI}$$

infolge P $\left(S \leq \frac{L_1}{2} \right)$:

$$w_m = \left(\frac{L_1^2}{16} - \frac{S^2}{12} \right) \frac{PS}{EI}$$

$$w_i = -(L_1 + S) \frac{PSL_2(L_1 - S)}{6L_1EI}$$

infolge P $\left(S > \frac{L_1}{2} < L_1 \right)$:

$$w_m = \left(\frac{L_1^2}{16} - \frac{(L_1 - S)^2}{12} \right) \frac{P(L_1 - S)}{EI}$$

$$w_i = -(L_1 + S) \frac{PSL_2(L_1 - S)}{6L_1EI}$$

infolge P $(S > L_1)$:

$$w_m = \frac{PL_1^2(S - L_1)}{16EI}$$

$$w_i = \left(\frac{L_1 L_2}{3} + \frac{(S - L_1)L_2}{2} - \frac{(S - L_1)^2}{6} \right) \frac{P(S - L_1)}{EI}$$